

ARCHIVE
for
HISTORY OF EXACT SCIENCES

Edited by
C. TRUESDELL

Volume 1, Number 1



SPRINGER-VERLAG
BERLIN - GÖTTINGEN - HEIDELBERG



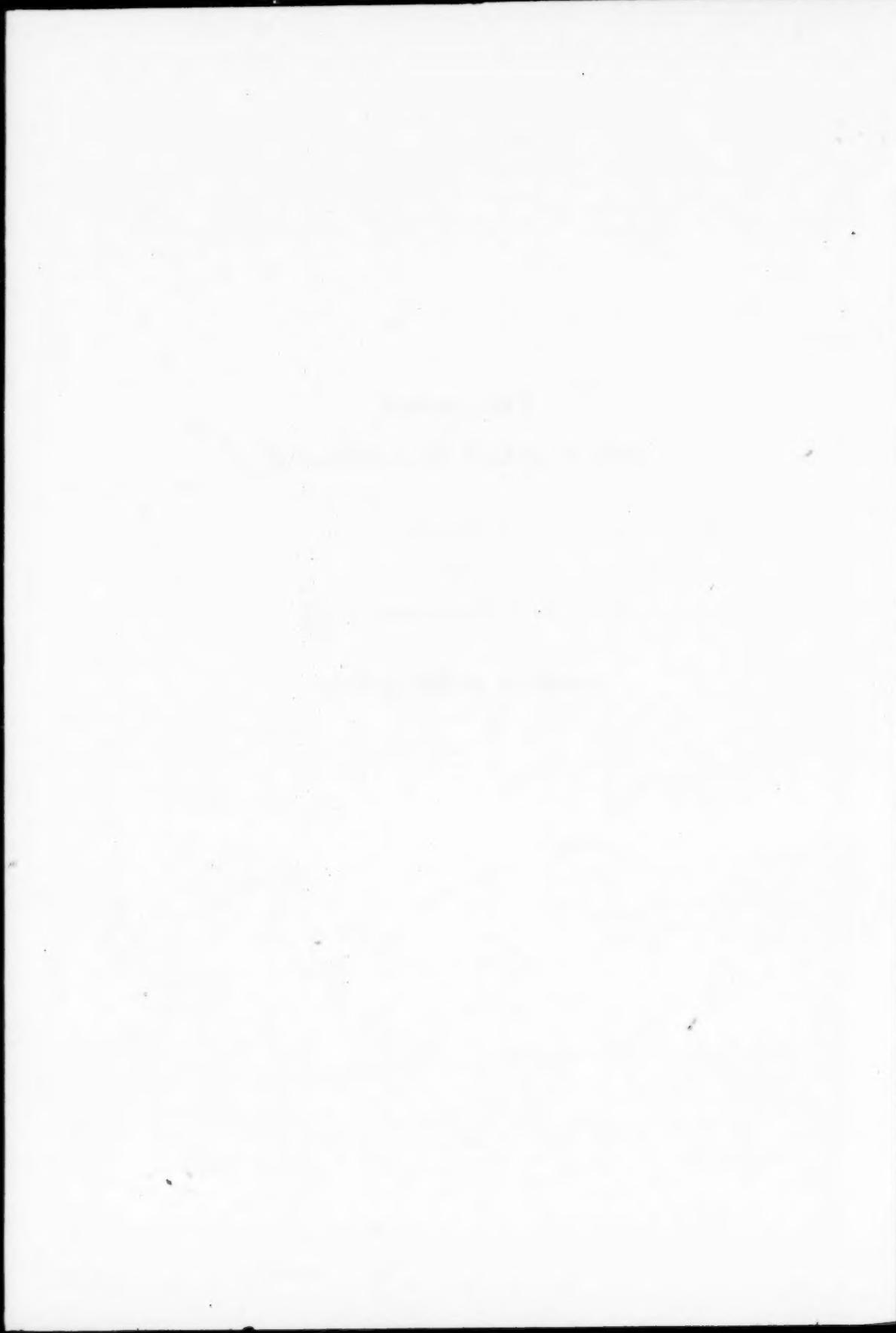
*This journal
seeks to uphold the tradition of*

P. DUHEM

and

E. T. WHITTAKER

scientists and historians



A Program toward Rediscovering the Rational Mechanics of the Age of Reason

C. TRUESDELL

Dedicated to my mother, Helen Truesdell Heath

Editorial Note: This is the first in a series of articles, by various authors, intended to open for the general reader a field of current research in the history of the sciences.

NEWTON's epitaph by POPE,

Nature and nature's laws lay hid in night.
God said, let NEWTON be, and all was light,

is a neat measure of the impact of the *Principia*, published in 1687. This impact, still felt today, was described not much differently by MACH:

NEWTON discovered universal gravitation and completed the formal enunciation of the mechanical principles now generally accepted. Since his time no essentially new principle has been stated. All that has been accomplished in mechanics since his day has been a deductive, formal, and mathematical development of mechanics on the basis of NEWTON's laws.

Thus MACH asserts that

1. NEWTON discovered a major part of mechanics.
2. NEWTON's system of mechanics is complete.

(In fact, MACH writes,

The principles of NEWTON suffice by themselves, without the introduction of any new laws, to explore thoroughly every mechanical phenomenon practically occurring.)

3. Nothing essential has been done in mechanics since NEWTON's time.

To find a poet in agreement with a philosopher or scientist is not unusual. Poets have often expressed, and expressed well, the philosophy of the generation before, or the science of the century before. What is unusual is that here the poet seems to predict the views of a physico-philosopher who followed 150 years later.

In 1788, just a century after the *Principia*, was published LAGRANGE'S *Mécanique Analytique*, little less celebrated. Every popular history glows in generality over it and quotes HAMILTON's judgment that it is "a kind of scientific poem"

In two ways this book has cut us off from earlier researches. First, the working scientist has accepted the *Méchanique Analitique*, if indirectly, as the final repository of all the mechanics that went before it and has not felt need to look behind it to its sources or around it to discover what it left out. Second, LAGRANGE included in the *Méchanique Analitique* short histories of statics, dynamics, and fluid mechanics, and these, too, have been accepted as final in outline if not in detail. Nearly all of MACH's pages about work done before 1800 seem to have been filled either by use of the sources cited by LAGRANGE or by plausible conjecture how discoveries of that kind must surely have been made, or at least would be made by a right-thinking person.

The new school of historians of science, beginning with DUHEM and daily waxing, has destroyed the first of MACH's major tenets, namely, that classical mechanics was created by GALILEO and NEWTON. They have found not only that NEWTON's contemporaries were less far from the light than had been thought, but also that throughout the Middle Ages and the Renaissance the concepts of Western mechanics were developed intensively and at length, though not always steadily. By historians of science MACH's historical picture as such is no longer taken seriously enough to need refuting, yet the historians have let MACH's view of the *nature* of mechanics itself, and in particular of the completeness of NEWTON's enunciation, stand by default. Judged by their works, the historians seem to think mechanics stopped with NEWTON, except for the formal developments which are to be found in textbooks and there associated with later names. No great historical effort has been spent upon the growth of mechanics since NEWTON's time. The scientists, in so far as they take any note of history at all, not only have shared the historians' neglect for the later mathematical development of mechanics but also, in the main, have ignored what the historians have learned about the earlier periods and have rested content with MACH's whole view or a rudimentary abstract of it. Between LAGRANGE and MACH, between the historians and the scientists, the Age of Reason is left the Dark Ages of the history of mechanics.

Yet it is neither the primitive mechanics of NEWTON nor the physical mechanics of MACH that we are taught as the most successful, the most thoroughly proved and understood, and the most perfect of the sciences of nature—the prototype and paradigm of a mathematical theory for physical phenomena. Rather, it is the easier parts of the rational mechanics of the BERNOULLIS, EULER, and their successors. Whence did it come? Why was it sought? How was it made? Where did it succeed, where fail? What does it owe to mathematics, to experience, to experiment, and what did it give to them in return?

To answer these questions, I call for a program of rediscovery of the Rational Mechanics of the Age of Reason. This note is an outline of such a program. Parts have been completed and published as my three essays listed at the end; parts remain scarcely charted. Rather than let the skeleton of the whole wait to be discerned under the flesh built upon it when, years hence, the work is finished, I have thought others might be led to share the pleasure of discovery for themselves if now I give out this short survey of the riches waiting for anyone willing take down the dusty volumes and read them, as they have not been read for two centuries, with consequence of the mathematics.

Contents

	Page
1. NEWTON's Principia (1687)	5
2. Scientific methods and scenes in the Age of Reason	9
3. The discoveries of JAMES BERNOULLI	14
4. Early efforts to clarify, extend, and organize the principles of mechanics	16
5. The proper frequencies and simple modes of vibrating systems before the discovery of equations of motion	18
6. Fluid mechanics before the discovery of differential equations of equilibrium and motion	19
7. The earliest differential equations of motion for systems	20
8. Definitive formulation of the principle of linear momentum: EULER's "first principles of mechanics" ("NEWTON's equations") (1750)	22
9. Rigid bodies, and the distinction of mass from inertia	24
10. Problems of vibration and wave motion seen from the equations of motion	24
11. The concept of normal stress, and the principles of hydrodynamics	26
12. The laws of elasticity, and the concept of shear stress	28
13. The principle of moment of momentum	31
14. The invariance of the laws of mechanics, and LAGRANGE's Méchanique Analytique (1788)	32
15. Retrospect: Experience, theory, and experiment in the Age of Reason	35

1. Newton's Principia (1687)

Since the *Principia* is one of those works everyone talks of but no one reads, anything said about it other than the usual honey-sauced eulogy must stand up against righteous indignation from all sides. But it is a work of science, not a bible. It should be studied and weighed—admired, indeed, but not sworn upon. It has its novelties and its repetitions, its elegant perfections and its errors, its lightning abbreviations and its needless detours, its extraordinary standards of rigor and its logical gaps, its elimination of stated hypotheses and its introduction of unstated ones.

I doubt there be a man alive today who has worked through the *Principia*; only such a one would be in case to issue justly the pronouncements which may be read about it in any popular essay on science or its history. Here I shall put down a hesitant and tentative summary based on detailed study of some parts and an attempt to survey the rest.

The *Principia* consists in three books, each of a different character. Its standard reputation grows mainly from the first half of Book I, concerning the motion of one or two bodies in a vacuum. MACH knew that this material was not entirely original, and subsequent historical research has shown that most of its contents, both in physical principle and in conclusions, may be found in earlier writings. It is small oversimplification to say that on this subject the *Principia* is a retrospective work which selects, marshals, and formalizes the achievements of the century before it.

Although NEWTON's contemporaries were not unaware of this quality in Book I, nevertheless their admiration for it, whether they were of NEWTON's view or not, was great. In the first place, what NEWTON writes is correct, clear, and short; in earlier works the brilliant diamonds of discovery lie concealed in an opaque matrix of wordy special cases, laborious details, metaphysics, confusion, and error, while NEWTON follows a vein of pure gold.

But it was a second and more important quality that struck readers of the *Principia*. At the head of Book I stand the famous *Axioms, or Laws of Motion*:

- I. Every body continues in its state of rest, or of uniform motion straight ahead, unless it be compelled to change that state by forces impressed upon it.
- II. The change of motion is proportional to the motive force impressed, and it takes place along the right line in which that force is impressed.
- III. To an action there is always a contrary and equal reaction; or, the mutual actions of two bodies upon each other are always equal and directed to contrary parts.

Book I starts out as the first general treatise on mechanics, to be organized about and derived from fundamental laws. For readers of that day, it was this deductive, mathematical aspect that was the great achievement. From a few simple axioms, all the major properties of these motions of bodies had been proved.

The diverse phenomena successfully ordered within the *Principia* makes its shortness the more remarkable. While the ancients had been ready to make precise, mathematical statements, right or wrong, about the doings of the planets, their approach to motions on the earth had been largely qualitative, using the language of cause, effect, and tendency as in biology and medicine. This separation of heavenly geometry from earthly mechanics had been maintained by GALILEO, who, while he had done much to publicize the kinematical properties of uniformly accelerated motion, derived correctly by the schoolmen 300 years before, had widened the gap between geometrical mechanics and practical mechanical phenomena, first by refusal to connect celestial and terrestrial motions in any way, and second by setting up as governing presumably near and familiar motions laws valid only in an ideal or vacuous medium, the unfortunate practiser who has to work on the real earth being put off with effects recognized by name as being due to resistance and friction but explained only as qualities or tendencies in the style of the Aristotelian physics so contemned by GALILEO. KEPLER had sought a physics valid alike in the heavens and on the earth, but while his brilliant success with the solar system brought him to the brink of the law of gravitation, he did nothing with terrestrial mechanics. DESCARTES had categorically asserted that there is one mechanics, which rules alike above and below, but, lacking patience with details, he never pushed his inquiries far enough to learn that his own principles were partly incorrect as well as insufficient. Great and solid gains in dynamics were made by HUYGENS; his work, more than anything done before, showed the pregnancy of treatment by number and figure rather than attribute, but, conservative, he did not reach up to the planets.

The second half of Book I of the *Principia* is an entirely original work, but here NEWTON began to lose hold on his program of deriving everything mathematically from the axioms. I pass over the clever solutions of various problems on the attraction of spheres and spheroids as resting, on the one hand, on statical assumptions not fully stated, while, on the other, making no use at all of the laws of motion.

But surely the masterpiece of Book I is NEWTON's treatment of the problem of three bodies. Here the modern scientist who does not know NEWTON's work at first hand must be initiated into the facts. While he may regard NEWTON's laws as equivalent to the differential equations called "NEWTON's equations" in modern textbooks, there is no evidence that NEWTON himself thought of or ever

used his principles in any general mathematical form. Earlier in Book I, the problem of two bodies is skilfully reduced to an equivalent problem of one body attracted to a fixed center. Problems of this kind NEWTON could indeed formulate by means of differential equations, expressed in his usual style in terms of components tangent and normal to the paths, and then solve. But the three-body problem cannot be so reduced. For it, not only does NEWTON give no solution or approximate solution in the modern sense, but also he shows no sign of any attempt even to set up equations of motion. That he obtained some correct inequalities and groped his way to the major approximate results under this handicap is one more tribute to his peerless grasp of the physical essence of mechanics and to the might of his brain. It does not show, however, that his formulation of the general laws of mechanics was adequate. History proves the contrary. It was not so much additional mathematics that was needed to get further, for NEWTON was a master at approximate solutions, quadratures, and series expansions in definitely set mathematical problems. Rather, the fact that fifty years passed before any improvement over his results on the three-body problem was made shows that he himself had gotten the most out of the subject that his own methods and concepts could produce; to wrest so much from so primitive a formulation of mechanics required the genius of a NEWTON; none of his disciples, who might reasonably have been expected to build on his foundation, could raise the structure an inch higher. Before the next real advance, a half century of abstraction, precision, and generalization of NEWTONIAN concepts was necessary. The first to go substantially beyond NEWTON in the three-body problem was the man who found out how to set up mechanical problems once and for all as definite mathematical problems, and this man was EULER. The year in which the "NEWTONIAN equations" for celestial mechanics were first published is not 1687 but 1749, as we shall see.

While NEWTON's Book I is the achievement of KEPLER's program, NEWTON had a program of his own. Bodies on the earth, as any Aristotelian physicist was ready to say, did not in actual experiments obey GALILEO's orders, and the ideal medium or vacuum in which those proclamations are valid exactly does not, as the Aristotelian was all the readier to say, exist anywhere on this old, practical, physical earth. Seeing clearly that to be justified in neglecting friction it is first necessary to estimate its effects precisely, NEWTON set himself the problem of determining mathematically the nature of motion in resisting media. This, with some excursions, is the subject of Book II.

To make any solid study of fluid resistance, NEWTON had first to learn the laws of fluid motion. Here he had no foregoing pathfinder; here his program of mathematical deduction broke down. Book II is almost entirely original, and much of it is false. New hypotheses start up at every block; concealed assumptions are employed freely, and the stated assumptions sometimes are not used at all. Little from Book II has found its way into either texts or histories; what has, is often misrepresented. To create theory for the spring of air, for the flow of fluid from an orifice, for the progress of waves in water, for the oscillation of water in a tube, for the resistance suffered by bodies in rare or dense fluids, for the propagation of sound in air, for the internal friction of fluids, NEWTON created *new concepts*. That few of his concepts have been retained and few of his solutions

are right is less remarkable, considering the entire freshness of the subjects, than that he should have been able, in each case, to grope or beat his way to some definite answer. The brilliantly ingenious but, in the end, largely unsatisfactory Book II laid out the areas and defined the problems for many of the mechanical researches of the next century.

Book III, being astronomical, lies outside the present subject. In it NEWTON showed that the mathematical propositions of Book I, with suitable numerical values, square with the phenomena of the solar system.

In the three books of the *Principia*, NEWTON shows in the highest every ability of a great theorist: (1) to organize, derive by mathematics and recast known but separated laws and phenomena; (2) to create new concepts; (3) to obtain detailed numerical predictions and compare them with measured values.

But by no means did he give "classical" mechanics its present form, nor were his principles clear and definite enough to do so. If, for example, NEWTON's laws are sufficient, as MACH implies, to determine the motion of fluids, NEWTON himself gave no evidence of knowing it, for in his treatment of fluid flow he made no reference to the principle of momentum, inventing instead the ingenious but false artifice of considering part of the vessel filled with ice around a "cataract" of fluid to which GALILEO's results on falling bodies are presumed to apply. Each other hydrodynamical problem NEWTON attacks and claims to solve by special reasoning, special hypotheses, and special guesses, related vaguely to mechanical ideas and principles, but not in the least derived from a system of mechanics. In fact, neither NEWTON nor any of his disciples or rivals had a grasp of the principle of momentum sufficient to solve a single problem concerning the motion of a deforming body.

The uneasy status of the notion of force in the *Principia* is too well known to need more than a passing remark here. This was the one weakness in NEWTON's treatment that MACH, following LEIBNIZ and D'ALEMBERT, saw fairly clearly. Is the Second Law a mere definition of force? If so, how does it bring us any nearer to the laws of nature? If not, then what is force, and how do we measure and know it? Is it not but another of the old qualities and tendencies that rational mechanics must reject as meaningless renamings?

While NEWTON went some way toward distinguishing *mass* from *weight*, his concept of *body* was insecure. Sometimes the "bodies" entering his equations are what we now call *mass-points*, but at other times, as in problems of the attraction of a sphere, he considers bodies as filling finite portions of space. *Inertia* or *momentum* he does not define; Laws I and II are usually interpreted as the modern principle of linear momentum, but as a part of the explanation of Law I we read:

A top, whose parts by their cohesion are continually drawn aside from rectilinear motions, does not stop spinning, except insofar as it is slowed by the air.

Thus NEWTON has rotary as well as linear inertia in mind, but he gives no measure of it, and he leaves the reader without a hint of what principles govern the motion of a wheel on an axle.

This failing is not a matter of mere application or of lack of mathematical processes; on the contrary, it is only an inevitable consequence of the block which forced NEWTON already at the middle of Book I, when he came up against the

problem of three bodies, to compromise with his program of mathematical proof and to be content with half-guessed and inassessable approximations. Except for certain simple if important special problems, NEWTON gives no evidence of being able to set up differential equations of motion for mechanical systems. It is not the function of the historian to guess what NEWTON might have done or could have done, nor is what MACH could do with NEWTON's principles relevant; the cold fact is, the equations are not in NEWTON's book. As we shall see, a large part of the literature of mechanics for sixty years following the *Principia* searches various principles with a view to finding the equations of motion for the systems NEWTON had studied and for other systems nowadays thought of as governed by the "NEWTONIAN" equations.

To summarize: In NEWTON's *Principia* occur no equations of motion for systems of more than two free mass-points or more than one constrained mass-point; NEWTON's theories of fluids are largely false; and the spinning top, the bent spring lie altogether outside NEWTON's range.

So as not to leave too shocked those accustomed to the usual hagiography of science, I close this brief survey of the *Principia* with another, juster epitaph of NEWTON, the one cut upon his tomb:

Let mortals rejoice that such and so great an ornament to human kind has been. This estimate is rather strengthened than diminished by knowledge of what NEWTON really did for mechanics: far from completing "the formal enunciation of the mechanical principles now generally accepted", he began it.

This, then, is the exordium: The achievements, the omissions, and the failures of NEWTON in the *Principia*, 1687. The subject of the following outline is the intercentury to end in 1788 with LAGRANGE'S *Méchanique Analitique*, a book hardly less celebrated or, in its effect and acceptance, less definitive—a book as little known and as glibly cited.

2. Scientific methods and scenes in the Age of Reason

While by many nowadays mechanics is thought of as a branch of physics, it was not often so regarded in the Age of Reason, and the "classical" mechanics was not discovered by physicists. In the literature of that period, the papers on physics generally concern experiment or speculative rather than mathematical theory. The speculative physicists might almost be regarded as inheritors of the vague, practical, Aristotelian tradition opposed with fury and contempt by GALILEO and DESCARTES; none of them has left a mark on the history of physics. While some fine experimental discoveries were made, they were not of a kind to influence directly the growth of the great mathematical theory now regarded as "classical", for this was created by a handful of "geometers" or "algebraists", as they were called in that day, men who strove to put into mathematical form laws governing the daily physical experience evident to anyone who will open his eyes to it.

These were the cultivators of the new mathematics, the infinitesimal calculus. All had great ability and at least moderate interest in what would now be called pure mathematics. Individual tastes varied; one experimented much; some, little; most, not at all; some cultivated pure geometry and the theory of numbers, and

some did not. But in mechanics, the aims of all were similar. For none was the mere solving of problems enough; however much a special problem might sometimes excite curiosity and effort, the aim was always a proper statement within the principles of mechanics, a grasp of the case as special at its proper station in the theory as a whole. The clearest expression, of course in part a summary of practice, was given by D'ALEMBERT in 1743:

1. Rational mechanics, like geometry, must be based upon axioms which are obviously true.

2. Further truth in mechanics follows by mathematical proof.

He aimed

... to envisage in the most abstract and simple manner what can be the particular object of this science; to suppose nothing, to admit nothing in this object, beyond the properties which the science being treated supposes there.

The geometers of the Age of Reason laid as much weight on proof as do the pure mathematicians today. MACH sneered* at their "mania for demonstration". The Victorian critics, looking back on the eighteenth century with as much distaste for its standards of reason as for its realistic morals, ridiculed its excesses so as to belittle its triumphs. Indeed, "proofs" of the parallelogram of forces and of the existence of God were published, but these were exuberances in the century that gave us the rational theories of fluids and of rigid bodies, the equations of motion of dynamical systems, the principles of the bending of beams and the general view of elastic vibrations. In those times it was not always clearly realized that *something* must be assumed, or as we say today, postulated—in geometry, too, just as much as in mechanics. But, as D'ALEMBERT wrote, to be content with merely collecting or organizing knowledge, however true, and solving various problems, however adroitly, was not enough:

This would ruin the certitude of mechanics and reduce it to being nothing more than an experimental science.

As BERTRAND RUSSELL is reputed to have said, the habit of simply assuming results, once one is persuaded they are true, rather than trying to prove them, has all the advantages of thievery over honest toil. Nowadays geometry and mechanics are split apart; everyone recognizes that geometry without proof is nothing, while mechanics is grouped within physics as a science of empirical origin. In the Age of Reason, not only had this false and noxious cleavage not yet occurred, but the whole program of mechanics was against it: Each generation brought more of the phenomena of nature under the control of exact science. Had the geometers of the Age of Reason not somewhat overestimated the power of the mathematical way of thinking, perhaps they would not have achieved with it such brilliant, unparalleled success as in fact they did.

* It has been shown by VAN DER WAERDEN that MACH in criticising ARCHIMEDES' proof („griechische Beweissucht“ and „falsche und verkehrte Strenge“) of the law of the lever invented an incorrect substitute of his own rather than taking the pains to follow what ARCHIMEDES really did. See B. L. VAN DER WAERDEN, La démonstration dans les sciences exactes de l'antiquité, Bull. Soc. Math. Belg. 4, 8–20 (1957). There are similar falsifications in MACH's summaries of later mathematical works on mechanics, but his treatment of the whole science in the eighteenth century is in any case so fragmentary and unhistorical as not to deserve detailed study.

MACH, like his disciples today, confused the drive toward order and precision with metaphysics. He was so violently opposed to metaphysics that he banished from his history of mechanics most of the searching and analysis of the concepts of the subject, leaving the reader with the impression that it grew out of experiments.

Let it not be thought, however, that the embracing and elegant generality of mechanics came from philosophical speculation. Mechanics is a science of experience; for the theorist, physical experience is balanced against the experience of earlier theories for the phenomena. The history of rational mechanics is neither experimental nor philosophical; it is *mathematical*; it is a history of *special problems*, concrete examples for the solution of which *new principles and methods* had to be created. But the solution of the special problem was never left to stand alone; since there was only one true mechanics, the special case served not as an end in itself but as the *guide to the right conception*. The order and design of the structure were as valuable as the soundness of its members. In 1743 D'ALEMBERT wrote,

Up to the present, . . . more concern has been given to enlarging the building than to illuminating the entrance, to raising it higher than to giving the proper strength to its foundations.

In this work I have set myself the double object of pushing back the bounds of the science of mechanics and of smoothing the way to it, and my principal aim has been to achieve in some measure the one of these objects by the other; that is, not only to derive the principles of mechanics from the clearest ideas but also to apply them to new uses; to show all at once the uselessness of several principles used heretofore in mechanics and the advantage which may be drawn . . . from others; in a word, to extend the principles by reducing them.

With order and precision came elegance and beauty. While these, too, are banished from a positivist philosophy of science, their force is immediately apparent to anyone who knows modern pure mathematicians, so much so, indeed, that according to some current views mathematics is not a science at all, because it is not experimental and because its criteria of excellence are rather aesthetic than utilitarian.

That mathematics and music, pursued in the same spirit, were the special excellences of the Age of Reason was as plain then as it is now in retrospect. On his third voyage, Gulliver goes to Laputa, an island magnetically suspended in the atmosphere, inhabited by a race given over wholly to mathematics and music,

. . . one of their eyes turned inward, and the other directly up to the zenith.

These people are so abstracted in mathematical calculation or musical composition that they have to carry with them everywhere a servant equipped with a rattling bladder full of dried peas or little pebbles, to strike them gently on the mouth or ear when it is time to speak or listen, or to warn them from falling down every precipice or bouncing their heads against every post. At a meal,

In the first course there was a shoulder of mutton, cut into an equilateral triangle, a piece of beef into a rhomboides, and a pudding into a cycloid. The second course was two ducks, trussed up into the form of fiddles; sausages and pudding resembling flutes and hautboys, and a breast of veal in the shape of a harp. The servants cut our bread into cones, cylinders, parallelograms, and several other mathematical figures . . .

Their ideas are perpetually conversant in lines and figures. If they would, for example, praise the beauty of a woman, or any other animal, they describe it by rhombs, circles, parallelograms, ellipses, and other geometrical terms, or by words of art drawn from music . . .

Pause to note SWIFT's accuracy. Indeed, he has mastered the spirit of mechanics, not the mechanics of his own day, but that of the century previous, of GALILEO. SWIFT's words are a paraphrase of a famous passage in the *Saggiatore*:

Natural science is written in this great book, which stands ever open before our eyes—it is of the universe I speak—but you cannot understand it unless first you learn to understand its language and to know the characters in which it is written. It is written in mathematical language, and the characters are triangles, circles, and other geometrical figures, without whose means it is impossible for man to learn its content.

SWIFT wrote in 1726, when all this was changing. The new language of mechanics was not geometry but analytical formulae, or, as then it was called, *algebra*; now we call it differential and integral calculus.

Moreover, the association of mathematics and music was not accidental. While SWIFT was attacking the two most prided excellences of his own day, BACH and HÄNDL were in full creation. Not long afterward an eccentric and semi-learned king of Prussia, himself an expert performer on the traverse flute, was to retain as his private teacher a celebrated virtuoso, as his accompanist a son of BACH, and as workhorse of his academy a pupil of the BERNOULLIS whom he described as a "great algebrist". This latter, LEONARD EULER, had written almost simultaneously treatises on analytical mechanics and on a mathematical theory of music. D'ALEMBERT, the encyclopaedist and litterateur whose judgment FREDERICK II trusted above all others', was a brilliant if not very reliable mathematician; he, too, wrote treatises on dynamics and on the theory of music.

The abstracted inhabitants of SWIFT's isle of Laputa lived poorly:

Their houses are very ill built, the walls bevil, without one right angle in any apartment, and this defect ariseth from the contempt they bear to practical geometry, which they despise as vulgar and mechanic . . . And although they are dexterous enough upon a piece of paper . . . yet in the common actions of life I have not seen a more clumsy, awkward, and unhandy people, nor so slow and perplexed in their conceptions upon all other subjects except those of mathematics and music . . . Imagination, fancy, and invention they are wholly strangers to, nor have any words in their language by which those ideas can be expressed; the whole compass of their thoughts and minds being shut up within the two forementioned sciences.

That to SWIFT not only mathematics but also music was totally devoid of "imagination, fancy, and invention" is to be remarked.

While hating mathematics and music, SWIFT expressed grudging admiration for the achievements of the inhabitants of Laputa. They are a superior race, the nearly absolute tyrants of a large empire on the earth beneath, and without their skill the island would fall to the ground and break in pieces.

Neither must our colleagues in the natural sciences be allowed to fancy themselves superior to us in SWIFT's esteem. Them he banished to the Grand Academy of Lagado, on the low earth, where in filthy beggary they are engaged in such practical occupations as extracting the sunbeams from out the cucumbers and reconverting humal offal to food—reversing, be it noted, the processes of nature.

Laputa in real life was the mathematical sections of the academies and learned societies of Europe. The establishment of these centers asserts the acceptance of the new, algebraic science. There was no revolution such as that of GALILEO and

DESCARTES in the century before. Rather, the course of the eighteenth century researches was perfectly in the spirit of NEWTON's program. In his original preface NEWTON wrote:

The ancients considered mechanics as twofold: as rational, which proceeds accurately by proofs, and practical. To practical mechanics belong all the manual arts, from which the name mechanics was adopted. But as artificers do not work with perfect accuracy, it comes to pass that mechanics is so distinguished from geometry that what is accurate is called geometrical; what is less accurate, mechanical. However, the errors are not of the art, but of the artificers. He that works with less accuracy is the less perfect mechanic; and if any could work with perfect accuracy, he would be the most perfect mechanic of all.

Far from being the materialist MACH and the physicists would make of him, NEWTON shared fully the "mania for demonstration". That he was not entirely successful grew from the grandeur of his own undertaking. Perhaps mindful of the imperfections in his brilliantly original Book II, he wrote at the same time:

I wish we could derive the rest of the appearances of nature by the same kind of reasoning from mechanical principles . . .

As the basis of his "System of the World" in Book II, NEWTON set nine "Hypotheses". The last five, which are assertions about the planets and the moon, he labelled "Phenomena" in the second edition (1713), where he called the first three "Regulae philosophandi", a modern rendering of which would be, "Rules of inference in natural science". In these "Rules", if anywhere, should we seek the experimental basis of his mechanics, but we should seek in vain.

Hypothesis 1. We are to admit no more causes of natural things than such-as may be both true and sufficient to explain their appearances. Indeed, Nature is simple and affects not the pomp of superfluous causes.

Hypothesis 2. And thus for natural effects of the same kind there are the same causes.

As breathing in men and beasts; the fall of stones in Europe and in America; the light in a cooking fire and in the sun; the reflection of light on the earth and on the planets.

Hypothesis 3. Every body may be transformed into a body of any other kind, and may take on successively all intermediate degrees of qualities.

This last is hard to understand and is not mentioned by historians with an empirical bent. What it means, roughly, is that physical phenomena occur smoothly, not by jumps; it might be called the "non-quantum hypothesis". Its purpose, we may conjecture, is to assert physical relevance for the differentiations and integrations which occur on almost every page of the *Principia*, and in such a context it is familiar to every student of the eighteenth century as "LEIBNIZ's law of continuity", frequently invoked by the continental geometers even after EULER had proved decisively that it is untenable.

In the edition of 1713, NEWTON receded from the boldly speculative position he had taken when younger; he was then sixty-nine, his creative days were past, and he was more prone to tighten the grip of his system than to strengthen its foundation. He replaced Hypothesis 3 by the entirely different

Rule 3. The qualities of bodies which admit no increase or decrease, and which present themselves in all bodies within reach of experiment, are to be taken as qualities of all bodies whatsoever.

The long, following gloss begins "For since the qualities of bodies lie unknown to us except through experiments . . .," and here the positivist will erect his ears and listen intently, but with disappointment, for NEWTON's purpose is the opposite of experimental. Far from limiting us to experimentally measured quantities, NEWTON orders us to take the qualities we observe in experimental bodies and *generalize* them to bodies on which we *cannot* experiment.*

3. The discoveries of James Bernoulli

The creation of rational mechanics is due as much to JAMES BERNOULLI as to NEWTON, though JAMES BERNOULLI's work nowadays is known to few. The areas of mechanics not touched by NEWTON were those which JAMES BERNOULLI cultivated, and the approaches and methods of the two great founders of modern mechanics were different in principle as well as detail. While NEWTON emphasized motion resulting from action at a distance, JAMES BERNOULLI developed the idea of contiguous action and the relation of dynamics to statics.

When the problem of the catenary curve was solved by LEIBNIZ, HUYGENS, and JOHN BERNOULLI in 1690, all three used special methods. The solutions of LEIBNIZ and JOHN BERNOULLI rested upon a theorem of PARDIES (1673) concerning the center of gravity of an arc; this theorem, in turn, presumed that the action of any part of a heavy arc on its neighbor is equipollent to a tangential force acting at the junction. JAMES BERNOULLI attacked the general problem of equilibrium of a string subject to arbitrary loading along its length. Retaining PARDIES' concept of contact force, he formalizes it as the *tension* in any flexible line, and he succeeded in obtaining the *general differential equations of equilibrium* determining the shape and the tension from the applied loading. Moreover, he found four different methods by which these equations may be derived: balance of normal and tangential forces, balance of forces in two fixed directions, balance of moments, and the principle of virtual work. While this work was done in 1691–1704, it was not published until 1744; meanwhile a part of it had been rediscovered by HERMANN, BERNOULLI's pupil, and published by him in 1716.

In 1684 LEIBNIZ had given the first analysis of the tension in the interior fibres of a loaded beam; on the assumption that this tension varies linearly across the section, he had concluded, in a special case, that the bending moment is proportional to the moment of inertia of the section. JAMES BERNOULLI found by experiment that the linear relation between extension and stretching force, which HOOKE and MARIOTTE had inferred and which LEIBNIZ had adopted, does not hold. He therefore, from that day to the end of his life, rejected it as general principle, though he was content to refer to it as a special case. On the basis of

* In the edition of 1726, following the controversies over gravitation, NEWTON added a fourth rule, to the effect that when we generalize from known phenomena, our assertions must be taken as true until proved false by new phenomena, "so the argument of induction may not be evaded by hypotheses". This is an illogical defense, because different generalizations can be consistent with the same observations. NEWTON is implying that since universal gravitation explains everything satisfactorily, no other hypothesis is to be admitted until universal gravitation is proved false. In other words, the *first* adequate theory has the right of priority over equally adequate aftercomers.

a model of the section of a bent bar as a lever hinged about a point on the concave side and retained by a spring on the upper side, he obtained the first theory of bending. If the spring is linear, the differential equation of the *elastica* results (1694), for the bending moment is then proportional to the curvature of the band.

HYUGENS, like BEECKMAN and HOOKE before him, saw that in bending the inner fibres are contracted and the outer ones extended. When this objection was made to JAMES BERNOULLI, he sought to construct a theory whereby the location of the neutral or unextended fibre would be determined. He attempted to integrate over the cross-section of the beam, as LEIBNIZ had done in the case when bending is negligible, but he never succeeded in doing so correctly, partly because he always refused to adopt any specializing hypothesis regarding the material. Finally he proposed a general principle which is not right; from it he concluded that the position of the neutral line is immaterial, but this is false. The problem he attempted, to derive a one-dimensional theory of beams from a fully general state of interior elastic tension, remains unsolved today, and his best work on it is not yet published.

In the course of these researches JAMES BERNOULLI evolved a general concept of elastic response in one dimension. While BEECKMAN had seen that it is the ratio (change of length)/(length), or *strain*, which should enter an elastic law, HOOKE had been content to measure change of length as a function of stretching force. JAMES BERNOULLI saw that a relation giving the ratio (force)/(area), or *mean stress*, as a function of strain characterizes a material rather than a particular specimen of material (1704). This is the earliest occurrence of a true *stress-strain relation* and a *material property* of a deformable medium. Only BERNOULLI's reluctance to put any faith in HOOKE's law kept him from introducing the so-called YOUNG's modulus; his discussion implies the existence of what in recent times has been called the "tangent modulus" of a non-linear stress-strain relation.

The dynamics of rigid bodies, altogether avoided by NEWTON, had been initiated earlier by the famous solution of HUYGENS for the physical pendulum (1673). In effect, HUYGENS assumed that the translational kinetic energy acquired by the parts of the body in falling is sufficient that each of these, if suddenly released, could mount to a height such that the center of gravity of the body would rise to its original level. This ingenious device yields a correct solution to the problem of oscillation of a rigid body about a fixed axis, but, beyond its being only tenuously related to other mechanical ideas, it is not valid or even meaningful in general motion of a rigid body. JAMES BERNOULLI sought a general principle of mechanics whereby HUYGENS' solution would follow. After a faulty attempt in 1681, JAMES BERNOULLI in 1691 created a new approach to mechanics, which he developed in a profound paper of 1703, second only to the *Principia* itself in influence on the later growth of the discipline. In this paper he resolves the acceleration of each mass into two parts; that normal to the path is produced by the constraint of rigidity, while that tangent to the path is again divided into two; one of these is the acceleration of gravity, and the other is the acceleration produced by the mutual interference of the masses because they are joined together. The system of forces of this latter kind, says BERNOULLI in effect, must be equilibrated. Applying the principle of the lever then yields HUYGENS' solution immediately.

Three major ideas of mechanics are foreshadowed in JAMES BERNOULLI'S method:

1. To determine the motion of a constrained system, introduce forces which maintain the constraints.
2. The accelerations of bodies if reversed in sign are equivalent to static forces (per unit mass).
3. Not only equilibrium of forces but also equilibrium of moments is necessary in dynamic as well as static problems.

It would be an exaggeration to say that BERNOULLI stated any of these principles or separated them from one another. Rather, they appear mingled and half-implied in his work. The organization of science is as necessary, and as difficult to achieve, as the discovery of root ideas; to locate the vent of the oyster is not to pry it open. Even a modern expert on mechanics, with all the benefit of hindsight, will find the works of NEWTON and JAMES BERNOULLI hard to follow. To recognize, distinguish, and formulate their concepts and methods in general terms required half a century of trial and search by the finest geometers, as we shall see.

4. Early efforts to clarify, extend, and organize the principles of mechanics

Prior to NEWTON's work, other approaches to mechanics were growing, with various success. The connection of force to motion is the primary problem of Western mechanics, but force is a vague word meaning different things to different persons. We still use it today in many undefined senses: force of habit, force of mind, force of argument, military force, as well as mechanical force. Mechanical force was familiar to everyone in the seventeenth century, too, as muscular sensation and as the cause or accompaniment of motion. But what is the *measure* of force? How is force to be identified with a quantity as well as a quality? NEWTON avoided the question by referring directly to force as if it needed no definition; in then setting it equal to mass times acceleration in simple dynamical problems, he might as well not have introduced it at all, since in effect he assumed a special form for the acceleration and then solved the resulting kinematical problem. In solving the same class of problems in essentially the same manner today, we acknowledge the efficiency of the means to the end, but we do not face the question which made NEWTON's approach unacceptable to most of his contemporaries, to whom it seemed a brilliant artifice for escaping the real nature of mechanical laws. They sought a simple, *general* statement about the motion of all bodies, from which the motion of a particular body in particular circumstances would follow mathematically.

DESCARTES (1644) had taken mass times velocity as the measure of force and had asserted that there was neither more nor less of it now than when the universe was created. In modern terms, he asserted the conservation of linear momentum. Impatient with special cases, DESCARTES did not apply his principle sufficiently to give a good idea of its meaning. Since he did not claim it applicable to all problems, we may be unfair in remarking that it does not hold for the simple pendulum, but that example suffices to show that the principle is not general. Justly criticizing the views of DESCARTES, LEIBNIZ (1686, 1695), who by no means

despised special problems, introduced the concepts of *live force* and *dead force*. The dead force is only the old force of position, known to the schoolmen and nowadays called potential energy, but the live force is mass times velocity squared, twice what is now called kinetic energy. LEIBNIZ asserted that loss of dead force results in corresponding gain of live force. This principle was taken up by JOHN and DANIEL BERNOULLI and made the basis of brilliant successes with special problems. Most if not all of the dynamical problems solved by NEWTON may be solved just as well by LEIBNIZ's principle, combined with use of DESCARTES' principle when it applies. Moreover, the principles of linear momentum and of energy are statements about the *whole* of the system, not requiring it, as do NEWTON's laws, to be cut up into parts. But neither suffices to determine the motion of any but the simplest systems.

While NEWTON's approach led ultimately to mechanics as we know it today, most of the life work of EULER was required in order to clarify and develop the NEWTONIAN concepts, to supplement them by equally important new ideas, and to demonstrate how real problems can be solved. EULER (1707-1783) was the dominating theoretical physicist of the eighteenth century. While his work is undervalued in the usual vague, historical books and attributions, the short factual history in the old *Handbuch der Physik* lists twice as many specific discoveries for EULER as for any other one physicist, earlier or later, and even at that most of his work is omitted. When EULER was nineteen, still a student, he outlined a great treatise on mechanics in six parts, only three of which he lived to finish in the next fifty years, although his program was virtually achieved by the hundreds of papers he published on all branches of mechanics and was supplemented by treatises on naval science, ballistics, and astronomy. The great bulk of EULER's publication is not the only impediment to a just historical estimate of what he did. He put most of mechanics into its modern form; from his books and papers, if indirectly, we have all learned the subject, and his way of doing things is so clear and natural as to seem obvious. In fact, it was he who made mechanics simple and easy, and for the straightforward it is unnecessary to give references. In return, the scientist of today who consults EULER's later writings will find them perfectly modern, while other works of that period require effort and some historical generosity to be appreciated.

Part 1 of EULER'S program, his *Mechanics*, appeared in 1736, when he was twenty-nine. It is the first treatise on *analytical* mechanics, in which all problems are set and solved by purely mathematical process. At this time as throughout his life, EULER followed NEWTON in taking force itself, in the sense used in statics, as a primitive idea. The *Mechanics* made three additions to the principles. First, while NEWTON had used the word "body" vaguely and in at least three different meanings, EULER realized that the statements of NEWTON are generally correct only when applied to masses concentrated at isolated points; the precise concept of *mass-point* is introduced, and the book is the first treatise devoted expressly and exclusively to it. Second, the *acceleration* is first explicitly recognized and studied as a kinematical quantity defined in a motion along any curve. Third, the concept of a *vector* or "geometrical quantity", a directed magnitude, is understood as pertaining not only to static force, for which it was familiar, but also to velocity, acceleration, and other quantities. The range of problems considered in EULER'S

first treatise is narrower than in NEWTON's *Principia*. While motion in three dimensions is treated precisely and systematically, no body more complicated than a single mass-point occurs in the book. Following NEWTON, EULER here always resolves acceleration along directions defined intrinsically with respect to the curving path of the mass-point, though in some cases he resolves the applied forces relative to directions fixed in space. By this first book of EULER, a part of mechanics is consolidated, but only a small part.

5. The proper frequencies and simple modes of vibrating systems before the discovery of equations of motion

The first mathematical analysis of the vibrating string leading to any great result was given by TAYLOR in 1713. He derived the frequency of the fundamental mode, which he in effect assumed to be of sinusoidal form. The corresponding laws of proportion had been obtained earlier by MERSENNE (1625) and GALILEO (1638), but not from theory, and the numerical factor had not been determined. TAYLOR applied NEWTON's second law to a differential element of the string; despite this promising start, he did not recognize the result as a differential equation of motion, and his work rests on confusing and partially erroneous special assumptions.

In 1727 JOHN BERNOULLI calculated the restoring force in a taut massless string loaded by n equal and equidistant masses. This model had been studied earlier by HUYGENS, who had found the frequency when $n = 1$. BERNOULLI, using a quasi-static device, obtained the fundamental frequency when $n = 2, 3, 4, 5, 6$, and 7.

That the overtones of a string have frequencies $k\nu$, $k = 1, 2, 3, \dots$, where ν is the fundamental frequency, had been found experimentally by MERSENNE (1633); that the k^{th} overtone corresponds to a form of vibration with $k - 1$ nodes was demonstrated experimentally by NOBLE and PIGOT (c. 1674) and by later writers. While these facts were fairly well known, neither TAYLOR nor JOHN BERNOULLI heeded them. Their theoretical work is confined, tacitly, to the fundamental mode.

DANIEL BERNOULLI, in work beginning about 1733, was the first to understand the nature of small vibrations in general and to obtain a partial theory for them. The crucial problem was that of a massless cord loaded by two weights; this system is often called the compound or bifilar pendulum. DANIEL BERNOULLI, using a quasi-static device applied to a general principle invented by him to determine the effect of constraints, calculated the forms and frequencies of the two modes and indicated that when there are n weights, there are n different modes, each with its own frequency; he showed that there are infinitely many modes for the continuous heavy cord, and he determined the forms and frequencies of the first two. While giving evidence of knowing the corresponding theory for the taut string, of course much simpler to treat, he did not trouble to publish anything about it until many years later. EULER at once generalized these results in various ways; while his dynamical principle is different from BERNOULLI's, it is equally special.

In 1734 DANIEL BERNOULLI and EULER simultaneously found the differential equation for the simple modes of transverse vibration of elastic bars but could integrate only in series. The resulting scaling law makes definite the old suggestion

of LEIBNIZ (1684) that the elastic and acoustic properties of bodies are connected. In 1739 EULER gave the first analysis of a simple harmonic oscillator driven by a harmonic generator; he emphasized the phenomenon of resonance, which had never appeared in a mathematical theory before, suggesting practical application for driving a naturally oscillatory machine by an oscillatory engine. Then he learned how to integrate explicitly linear ordinary differential equations with constant coefficients. This made the problem of transverse vibrations of bars much easier. By 1743 DANIEL BERNOULLI and EULER had given the conditions to be satisfied at a clamped, pinned, or free end; had recognized the six possible kinds of vibration; and for four of the kinds had calculated, to more than sufficient accuracy, the entire sequences of proper frequencies and the nodal ratios for the first few modes. EULER's work was more complete and elegant; DANIEL BERNOULLI's was closer to the physical phenomena. In particular, BERNOULLI verified many of the results by simple experiments, and in 1742 he began to see some theoretical reason that two or more simple modes can be excited simultaneously in the same body.

The experience gained with these special theories for vibratory phenomena was of great help toward discovery of the general principles of mechanics, as we shall see.

6. Fluid mechanics before the discovery of differential equations of equilibrium and motion

While remarkable theorems of hydrostatics had been proved by ARCHIMEDES and STEVIN, and certain isolated results concerning fluid motion were known, it was two special problems treated for the first time in NEWTON's *Principia* that gave rise to the great theories of the next century. First was the problem of the figure of the earth, which NEWTON identified with the figure of equilibrium of a rotating mass of fluid subject to its own mutual gravitation; he concluded that the earth was flatter at the poles than at the equator. The CARTESIANS somehow inferred from the system of vortices that it should be flatter at the equator. In each treatment, both the application of physical principle and the mathematical detail were dubious, but the general opposition of the two views of mechanics was made clear, and a simple issue of this kind could be discussed with happy partisanship by numerous well informed persons who understood nothing about either theory. An experimental test on a large scale was proposed: expeditions were sent to the corners of the earth to measure its curvature. The expedition to Lapland returned sooner, with its determination that the earth is indeed flatter at the poles, and MAUPERTUIS, its leader, was called in triumph "the great flattener". While in the popular view the Newtonian system was by this one blow proved correct, the measured eccentricity did not agree with NEWTON's value, and the geometers were moved to read more critically the passage in which NEWTON derived his result. They found his argument insecure. NEWTON had not used either the momentum principle or any principle of hydrostatics, for these were not yet known in sufficient generality to be applicable. As an independent hypothesis, he had asserted that two perpendicular columns of fluid, one axial and the other equatorial, meeting at the center of the spinning figure must have equal weight. Other principles were proposed by HUYGENS and MACLAURIN;

the latter succeeded in proving in 1741 that any oblate spheroid is a figure of equilibrium and in relating the angular speed to the eccentricity. Thus began a search for the true and general laws of hydrostatics.

In 1743 appeared CLAIRAUT's book, *The Figure of the Earth*, where CLAIRAUT set himself the problem of determining the possible figures of equilibrium of fluid masses spinning subject to an arbitrary law of force. In this theory is the first occurrence of a *general vector field*. While CLAIRAUT could not solve the problem, he concluded that in order for a system of forces to be compatible with equilibrium, it is necessary that the work done in driving those forces through any closed circuit be zero; that is, the differential element of work must be perfect. CLAIRAUT thus obtained a condition to be satisfied by the forces, but he did not reach the general equations of hydrostatics.

The second main problem of fluid mechanics to grow out of NEWTON's unsuccessful attempts was that of efflux from a vessel. The first real progress on this particular problem was made by BORDA at the end of the century, but long before this, other trials, while unsuccessful in their immediate object, had opened the field of hydrodynamics. DANIEL BERNOULLI (1727) was the first to apply the principle of momentum correctly to a continuous medium; he found the force exerted by a jet impinging upon an inclined plate; the result has the same form as NEWTON's formula for the resistance of a body moving in a "rare fluid" or very rarefied gas, but the physical circumstances are different.

DANIEL BERNOULLI's *Hydrodynamica* (1733–1738) contains the first successful attempt to analyse the pressure and velocity of a fluid in motion. By *pressure*, DANIEL BERNOULLI means the force exerted by the fluid upon the walls of the tube or vessel containing it, and as a measure of this pressure he takes the height of a column of stagnant fluid such as had long been used to measure the pressure of a fluid in equilibrium. His result has the form of the now well known "BERNOULLI equation" for steady flow, but it would be misleading to attribute to DANIEL BERNOULLI the ideas with which that equation is now associated. In his book is no attempt to get equations of motion or to describe the deformation of a continuous medium. Treating the fluid as a block, BERNOULLI imagines that the wall of the vessel downstream from the point where the pressure is sought suddenly dissolves into thin air; the block of fluid formerly occupying it then experiences an impulse, which BERNOULLI by use of the principle of energy relates to the pressure that the wall must in fact exert in order to hold the fluid in.

7. The earliest differential equations of motion for systems

The first differential equations of motion for systems having more than two mass-bearing points were published in 1743 by JOHN BERNOULLI and by D'ALEMBERT. The systems considered are more complex than one might expect; as often happens, the simpler cases were not the first to be treated successfully.

By 1739 JOHN BERNOULLI had found the *general equations of hydraulics* for incompressible inviscid fluids. While the main innovation in this work will be described in § 11, here we remark that BERNOULLI uses a NEWTONIAN principle: The accelerating force on an infinitesimal slice of fluid equals the mass of the slice times its acceleration. Apart from the incomplete work of TAYLOR on the

vibrating string, here is the earliest occurrence of this now familiar argument. However, while BERNOULLI derives the quantities that would suffice to write down the partial differential equation of motion, he does not quite do so, but rather integrates along the tube. The result he obtains is a generalization of the hydraulic equation of DANIEL BERNOULLI.

This work is published in a volume dated 1742 but issued in 1743. In the same volume is JOHN BERNOULLI'S treatment of the bifilar pendulum and the more general weighted cord. Here he introduces explicitly the *tensions* in the parts of the cord. For the case of two weights, he used the balance of forces against accelerations to derive the *differential equations of finite motion*. In the case of n weights, JOHN BERNOULLI comes close to the general equations but misses them by use of a special device. His treatment is the first to refer all positions to a *single, rectangular Cartesian system*.

In a work of D'ALEMBERT printed in this same year, 1743, the differential equations of small motion for the weighted cord are derived by a general method. At the age of twenty-four, D'ALEMBERT published a book with a title indicative of what mechanics was in the Age of Reason: "Treatise on Dynamics, in which the laws of equilibrium and motion of bodies are reduced to the smallest possible number and are proved in a new way, and where is given a general principle for finding the motion of several bodies which react mutually in any way." This is the book to which we have several times referred in connection with the program of the age. In regard to practice, it is less successful. Contrary to the usual statements, neither did D'ALEMBERT reduce dynamics to statics, nor did he, here or anywhere, propose either of the two forms of the laws of dynamics now usually called "D'ALEMBERT'S principle", these being due to EULER and to LAGRANGE, respectively, at a later period. D'ALEMBERT was the first to give a general rule for obtaining equations of motion of constrained systems. After decomposing the motion into two parts, one being "natural" and the other due to the presence of the constraints, he asserted that the forces corresponding to the accelerations due to the constraints form a system in static equilibrium. Thus his principle is a development of one of the ideas in JAMES BERNOULLI'S great paper of 1703; it is still closer to the principle stated even more obscurely by DANIEL BERNOULLI in his treatment of the hanging cord in 1732-1733 (published 1740). Like the older assertions of DESCARTES and LEIBNIZ, it is a statement about the system as a whole, not about its parts, and it is insufficient to solve the general problems of dynamics; D'ALEMBERT tacitly invoked other principles as well, but he got results; moreover, he was the first to derive a *partial differential equation* as the statement of a law of motion, the particular case being that of a heavy hanging cord.

While EULER was soon to become the champion of NEWTON'S approach to mechanics, D'ALEMBERT started a new and opposed way of thinking. If the motion is known, he observed, then what we call forces are merely manifestations which may be calculated from it.

Why should we appeal to that principle used by everybody nowadays, that the accelerating or retarding force is proportional to the element [*i.e.* differential] of velocity, a principle resting only on that vague and obscure axiom that the effect is proportional to the cause? We shall not investigate at all whether this principle be a necessary truth; we shall assert only that the proofs of it given up to now do not seem very convincing to us; neither shall we adopt it, like some other geometers, as

a purely contingent truth, for that would ruin the certainty of mechanics and reduce it to being nothing but an experimental science. Rather, we shall be content to remark that the principle [of accelerating force], be it true or be it dubious, be it clear or be it obscure, is useless to mechanics and ought therefore to be banished from it.

While NEWTON's name is not mentioned, it is NEWTON's entire view of mechanics that D'ALEMBERT is banishing. If, for POPE and MACH, NEWTON had made all light, D'ALEMBERT regarded "forces inherent to bodies in motion", the central concept of the NEWTONIAN view, as "obscure and metaphysical beings, capable of nothing but spreading darkness over a science clear by itself."

Immediately upon seeing JOHN BERNOULLI's work on hydraulics, EULER acclaimed it for its use of the "true and genuine method", namely, the NEWTONIAN balance of force against acceleration. EULER's new treatments of constrained systems are close to JOHN BERNOULLI's cases in spirit but far clearer and more general. In 1744 EULER set up the differential equations of finite motion for the taut loaded string and for n rigid bars linked together, described in terms of a single rectangular Cartesian co-ordinate system. The only mechanical principle used is the "NEWTONIAN" one, and the integrals of linear momentum and kinetic energy are derived by integration. This is the *earliest occurrence of exact differential equations of motion for a system of n bodies*, and also the earliest example of what we are now taught by textbooks of mechanics as the "NEWTONIAN" method. As a corollary, the first recognition of the status of the integrals of linear momentum and kinetic energy for the system is to be found here also. By a brilliant passage to the limit in certain corollaries of the fundamental equations, EULER derived a complicated set of partial differential equations governing *finite motion of the continuous string*, but he was unable to draw any conclusion from them. This work appeared in print in 1751.

In 1746 D'ALEMBERT derived the *linear wave equation* as governing the small vibration of a string. He did not use his own principle of mechanics but instead, in this case, adopted the NEWTONIAN approach; in effect, he took up and linearized an equation TAYLOR had derived but failed to exploit. D'ALEMBERT'S wave equation is not the first partial differential equation of motion to be obtained, but the first to attract any attention.

8. Definitive formulation of the principle of linear momentum: Euler's "first principles of mechanics" ("Newton's equations") (1750)

The first formulation of the general problem of celestial mechanics and in particular of the problem of three bodies, by means of a system of differential equations occurs in a paper of EULER, written in 1747 and published in 1749. With this paper begins the systematic development of NEWTONIAN principles applied to the solar system. The method used is the same as in EULER's papers on constrained systems completed just before, but of course the mechanical problem is simpler and more easily surveyed. As often happens, correct results were obtained before the general method was fully comprehended, and the generality was seen by induction from the successes with concrete special cases. That, sixty years after the *Principia*, a general approach to dynamical systems had finally been found, came as an anti-climax; once it was seen, no one could be surprised; indeed, it was "obvious". As EULER himself wrote,

The foundation . . . is nothing else than the known principle of mechanics, $du = p dt$, where p is the accelerating power and u is the velocity . . . But some reflexion is necessary before we can see that this principle holds equally for each partial motion into which the true motion is thought of as reduced. Moreover, this lemma includes all the principles ordinarily used in the determination of curvilinear motion.

The modern student may find it hard to understand how sixty years of experience with special cases had to follow before this simple conclusion, which he is taught to accept unquestioningly in a first course in physics, was seen. It is unlikely however, that he has a better grasp of mechanical principles than did NEWTON or EULER. No one doubted the correctness of "NEWTON's second law", at least as a rule for problem-solving, but what no one saw, until it was shown, was that among all the various mechanical principles then used it was this one which was *general*: *It applies to every part of every system*, and more than this, *it suffices to get all the equations* determining the motion of many systems. As LAGRANGE explained when writing a history of mechanics in 1788,

"But if one looks for the motion of several bodies which react upon each other . . . then the question is of a higher order, and the preceding principles [i.e. those known before 1742] are insufficient to solve it."

EULER himself was not yet so far along in 1747. He had reached clarity on discrete systems, but for solid or fluid media he still failed of a general and unifying method. After experience using a similar approach to the vibrating string and to hydraulics, in 1750 he finally saw that the principle of linear momentum applies to *mechanical systems of all kinds*, whether discrete or continuous. His paper called "Discovery of a new principle of mechanics", published in 1752, presents the equations

$$F_x = Ma_x, \quad F_y = Ma_y, \quad F_z = Ma_z,$$

where the mass M may be either finite or infinitesimal, as the axioms which "include all the laws of mechanics". Later he called them "the first principles of mechanics". These are the famous "NEWTONIAN equations", here proposed for the first time as general, explicit equations for mechanical problems of all kinds. The discovery of this principle seems so easy, from the NEWTONIAN ideas, that it has never been attributed to anyone but NEWTON; such is the universal ignorance of the true history of mechanics. It is an incontestable fact that more than sixty years of research using more complicated methods even for rather simple problems took place before this "new principle" was seen.

The fruit of the "new principle" was immediate. In the same paper in which it is announced, EULER succeeded in deriving the equations of motion of a rigid body. In his unpublished notebooks he derived at once, and by inspection from the long known formulae for the restoring force, the partial differential equations for small transverse vibrations of a rod and for various flexible systems.

But in asserting that this principle "contains by itself all the principles which can lead to the knowledge of the motion of all bodies, of what nature soever they be," EULER was wrong. It required the accumulated mechanical experience of much of the rest of his life before he saw that a second principle is needed, and before, as we shall indicate below, he was able to find it.

9. Rigid bodies, and the distinction of mass from inertia

While the problem of oscillation of a heavy rigid body about a fixed axis had been solved correctly by HUYGENS, and while a more satisfactory method containing the germ of several later principles had been created by JAMES BERNOULLI in 1703, in 1750 it could not be said that the general motion of a rigid body was understood at all. Even for motion about a fixed axis, the reaction of the body upon its support could not be calculated, and no method for determining the behavior of a spinning top was known.

EULER's "first principles" changed the scene overnight. As just mentioned, in the same paper where these principles are published, EULER obtained the general *equations of motion of a rigid body* about its center of gravity. He applied the "first principles" to the elements of mass making up the body, at the same time replacing the acceleration of the element by its expression in terms of the *angular velocity vector*, which makes its first appearance here. Taking moments about the center of gravity then yields, after some reduction, the differential equations of motion known as "EULER's equations" for a rigid body, subject to assigned torque about its center of mass. In the process arise naturally the six components of what is now called the "tensor of inertia". The "moment of inertia" had occurred, of course, in the old researches and had been named by EULER much earlier. The paper begins with the proof that in order for a body to spin freely about an axis, not only must that axis pass through the center of gravity, but also the two appropriate products of inertia must vanish, generalizing the corresponding results for laminae which EULER had discovered five years before. Thus NEWTON's example of the spinning cylinder is put at its proper and special place: While inertia as an expression for the property of continuing motion is indeed appropriate for translational motion, it applies only to restricted kinds of rotation.

In 1755 SEGNER proved that every rigid body has at least three axes of permanent rotation, and that these are mutually perpendicular; for special bodies, there may be infinitely many axes. In work of 1758-1760 EULER revised the whole theory of rigid bodies. Beginning with the most general deformable body, he defined and named its "center of mass" or "center of inertia", possibly distinguished from the center of gravity when this latter exists, and asserted that in any body the center of mass moves in the same way as would a mass-point located there, having the same mass as the body, and subject to the resultant force acting on the body. For a rigid body, EULER showed more clearly how the inertia, or resistance to change of motion, is determined not by the mass but by the *tensor of inertia*, the properties of which he analysed briefly but exhaustively. This material he developed still more clearly in his great treatise on rigid bodies, published in 1765.

Thus the distinction of mass from weight, begun by NEWTON, was completed, and at the same time inertia and mass, confused in the older work, are separated. The position of "NEWTON's second law" is fixed as appropriate only to infinitely small bodies or to the centers of mass of finite bodies.

10. Problems of vibration and wave motion seen from the equations of motion

As soon as differential equations of motion were discovered, the whole theory of small oscillations could be approached in a unified way. The first modern

work on vibrations is EULER's analysis (1748) of the motion of n equal masses coupled by like springs; all results may be interpreted also in the context of the taut loaded string. EULER found the general solution as a sum of n particular solutions, each of which corresponds to a simple mode with a definite frequency of oscillation. EULER calculated these frequencies explicitly and found the values of the arbitrary constants in the case when only the end mass is displaced initially.

While D'ALEMBERT (1746) obtained the solution of the partial differential equation for the vibrating string in terms of arbitrary functions, he hedged it about with so many unnecessary conditions as to make it useless. These were denied by EULER (1748), who asserted that the partial differential equation itself suffices as a full statement of the mechanical problem. In 1734-1739 DANIEL BERNOULLI in his studies of various oscillating systems had concluded that small vibrations which a body may execute separately it may also execute simultaneously, and in 1753 he wrote a paper asserting that the most general vibratory motion of any body may be composed by superposition of such simple modes. Since BERNOULLI never consented to begin from differential equations of motion, mathematical proof of such a proposition was out of the question; rather, he regarded it as a new law of physics. He was never able to substantiate his contention by solving important special initial-value problems, mainly because the expansion theorems necessary to carry out the details were not discovered until the next century. LAGRANGE entered the controversy in 1759 by calculating the explicit solution of the initial-value problem for the loaded string, generalizing slightly EULER's results of 1748, and attempting to obtain the solution in arbitrary functions for the continuous string by a passage to the limit. As D'ALEMBERT pointed out, the work is faulty. LAGRANGE claimed to disprove BERNOULLI's contentions, but here, too, LAGRANGE was in error.

The verbose subsequent polemic contributed little to mechanics, but in the course of it EULER was impelled to study the wave equation more closely. Virtually everything known today about the uniform vibrating string was found by him, directly from the functional solution. In particular, he showed that disturbances are propagated to the right and left at the speed corresponding to the fundamental period, and he discovered the laws of reflection from the end points. This work showed that LEIBNIZ's law of continuity is untenable; by destroying the old prejudice in favor of "equations" (*i.e.*, roughly, analytic functions), it opened the way to the general concept of wave motion.

EULER recognized the simple modes of bars and other vibrating systems as being special solutions, corresponding to special initial conditions, of the appropriate partial differential equations, but he was unable to get the general solutions. By considering a membrane as a network of fibres, he obtained the correct partial differential equation for its small motions (1759); he calculated the simple modes and some of the proper frequencies for rectangular and for circular drums. His theories of curved rods are faulty from lack of a developed geometry of the strain of a curve; similar lack of differential geometry, combined with D'ALEMBERT'S false idea that a plate may be regarded as a bundle of rods, invalidates JAMES II BERNOULLI's theory of plates (1787), motivated by CHLADNI'S experimental determination of nodal patterns and proper frequencies (1787).

11. The concept of normal stress, and the principles of hydrodynamics

In JOHN BERNOULLI'S *Hydraulics* (1739), as we have seen, is the first successful use of the balance of forces to determine the motion of a deformable body. It would be wrong to consider this a mere application of NEWTONIAN principles. In order to render those principles definite, BERNOULLI saw that it is necessary to make some hypothesis about the action of fluid upon fluid. Guided, perhaps, by the old researches on generalized catenaries, where he had been the first to isolate correctly the forces acting upon an infinitesimal element of a cord (1691 to 1692, published 1743), he assumed that the fluid on each side of an infinitesimal normal slice presses normally upon that slice, with a varying force which is itself a major unknown. He introduced the *internal force* of hydraulics. This is neither the wall pressure of DANIEL BERNOULLI nor the weight of a column of stagnant water as in the older researches; including both these ideas as special cases, it is, like the tension in a flexible line, a major independent concept of mechanics, a great advance in principle, for it achieves the separation of pressure from weight and replaces vague notions of action at a distance by a concrete view of contiguous action in a certain kind of material. The *resultant accelerating force* on the slice is the difference of the internal forces acting upon its two sides.

JOHN BERNOULLI'S explanation of these ideas was poor and his use of them limited to immediate extensions of the older results of his son. EULER took up the new hydraulics, made it clear in principle, and showed its application to many important cases. In a sequence of researches done in 1749—1752, he determined the flow of fluid in pumps and turbines, calculated the reactions in the machines, and found conditions sufficient to prevent cavitation within them.

D'ALEMBERT had entered the field of fluid mechanics with a treatise, published in 1744, concerning the problems which had been solved before by DANIEL BERNOULLI. This work, like the hydraulic researches of JOHN BERNOULLI and EULER, is limited to motions in one dimension where the velocity is supposed uniform over the cross-section of the tube. Theories of this kind cannot predict the forces exerted by fluids on submerged obstacles, and a prize was announced by the Academy of Berlin on the subject of the resistance of fluids. D'ALEMBERT'S essay, completed in 1749, contains the first analysis of the *velocity field*, allowing the velocity of the fluid particles to vary arbitrarily from one place to another. The Academy, refusing to award the prize, returned the manuscripts and suggested that the contestants compare their results with measured data. D'ALEMBERT angrily withdrew, publishing his essay in 1752. It contains in major special cases the partial differential equation expressing the conservation of mass in the flowing fluid, the condition of potential flow, and what may now be recognized as the condition of conservation of vorticity in more general flows. As in his studies of punctual systems, D'ALEMBERT avoided the use of force whenever possible; in hydrodynamics, this is difficult to do correctly, and D'ALEMBERT'S pioneering effort is incomplete as well as remarkably obscure in method and principle. Comparison of the results with experimental data was impossible and would have been premature in any case, for we know now that the data then available were taken in what are today called turbulent flows, not to be understood even roughly for another century; according to D'ALEMBERT'S theory, an obstacle in a steady flow suffers no resistance at all, as had been shown by EULER

in 1745, giving rise to misunderstandings over the next 150 years. More important than would have been the explanation of any particular experiment is the concept of a *field theory* of material behavior, which is initiated with this work of d'ALEMBERT.

The theory was taken up at once and rendered simple, clear, and general by EULER, who laid out the foundations of hydrodynamics in 1752—1759. The separation of the *kinematical* from the *dynamical* aspects of fluid motion, begun in JOHN BERNOULLI's *Hydraulics* and extended in EULER's hydraulic papers, is more important in the theory of the three-dimensional field, and EULER succeeded in constructing a definite and clear mathematical description of some aspects of the change of shape of a continuous body. From this point begins the full understanding of the *conservation of mass*, independently of changes of shape or volume.

EULER's greatest triumph in the theory of deformable bodies is his progress toward the theory of stress. In his earliest hydrostatical researches (1738, published 1749), he had seen that for incompressible fluids at rest on the earth's surface, the single axiom that the pressure of the fluid is normal to the surface on which it acts, and the same for all forms and orientations of that surface, suffices to prove everything in the subject. His hydraulic researches had rested upon JOHN BERNOULLI's idea that fluid, even in motion, presses normally upon itself, but only for particular fluid elements and particular kinds of flows. As if by a sudden intuition, seeing that all these ideas could be combined, EULER created the fully general concept of *internal pressure*, according to which the force exerted by the surrounding fluid upon any imagined interior boundary surface within the fluid, whatever its place and form, is equipollent to the action of a *field of normal pressures upon the surface*.

This idea is simpler than the predecessors it replaced, but, like many simple ideas, at first it seemed abstract, and it was slow to be understood. Nowadays it is often presented to beginners as if it were obvious; it cannot be obvious, because, as shown by later theories of fluid behavior, it is not always true. EULER saw at once that his statement of the theory included everything done before in fluid mechanics and rendered all former approaches obsolete:

The generality which I conceive, far from shutting off our light, will reveal to us rather the laws of nature in all their brilliance, giving still more reason to wonder at their beauty and their simplicity.

Nothing of this kind had ever been achieved in mechanics before. Even LAGRANGE, late in his life, grew to see the greatness of what EULER had done:

By this discovery, the entire mechanics of fluids was reduced to a single point of analysis, and if the equations which include it were integrable, one could determine completely the circumstances of motion and of action of a fluid moved by any forces. Unfortunately, they are so rebellious that up to the present time only a few very limited cases have been worked out.

EULER, however, like d'ALEMBERT before him, despite numerous brilliant studies was unable to conclude from his equations a single new result fit for comparison with experiment. Judged from a positivist philosophy, EULER's hydrodynamic researches are misconceived and unsuccessful: their basic assumptions cannot be established experimentally, nor did EULER obtain from them numbers which can be read on a dial. Yet, after EULER's death, special solutions

of his equations have given us the theories of the tides, the winds, the ship, and the airplane, and every year new practical as well as physical discoveries are found by their aid.

EULER'S success in this most difficult matter lay in his *analysis of concepts*. After years of trial, sometimes adopting a semi-empirical compromise with experimental data, EULER saw that the experiments had to be set aside for a time. They concerned phenomena too complicated for treatment then; some remain not fully understood today. By creating a *simple* field model for fluids, defined by a set of partial differential equations, EULER opened to us a new range of vision in physical science. It is the range we all work in today. In this great insight, looking within the interior moving fluid, where neither eye nor experiment may reach, he called upon the "imagination, fancy, and invention" which SWIFT could find neither in music nor in mathematics.

12. The laws of elasticity, and the concept of shear stress

Apart from the work on small vibrations, studies of elasticity were restricted to static deformation and thus pursued their course, unaffected by the major revision of dynamical principles at the middle of the century. Four major problems of principle originated from the work of JAMES BERNOULLI: (1) to derive the law of bending in an elastic band from the law of extension of the longitudinal fibres, (2) to determine the position of the neutral fibre in a bent beam and the nature of the forces acting upon a cross-section, (3) to unify the theory of flexible lines, resting upon the equilibrium of forces, with the theory of elastic bands, resting upon the equilibrium of moments, (4) to specify the elastic response of materials.

The first and fourth of these were solved by EULER in the course of a remarkable note on bells written while he was a student of JOHN BERNOULLI in Basel (1727) but, since its main subject is an incorrect theory of the oscillation of curved rods, left unpublished for nearly 150 years. To begin with, for a beam of any form, EULER assumed a linear variation of the tensions over the cross-section and integrated to obtain the total bending moment, thus uniting the procedure of LEIBNIZ, who had neglected bending, with that of JAMES BERNOULLI, who had not taken proper account of the variation of the tension. The result is the now familiar BERNOULLI-EULER law giving the bending moment as the product of the so-called YOUNG's modulus by the moment of inertia and the increase of curvature. As is clear from this statement, to this end EULER had to introduce the *modulus of extension*, which characterizes an elastic material rather than a particular specimen and is nowadays named after YOUNG*.

In papers published in 1760 and 1780, EULER presented these ideas more compactly and explained them better. In particular, he defined explicitly the modulus of extension, which had been used with only passing remark in his earlier work. Correct scaling laws for the dependence of frequencies of vibration upon

* As is well known, the modulus introduced by YOUNG (1807) does not enjoy this independence and is not the modern "YOUNG's modulus", being the constant of proportionality between force and strain, which was in standard use throughout the century preceding YOUNG's work.

the shape of the cross-section, under debate for some time, followed immediately from the introduction of this modulus.

While it had been remarked that a column loaded in compression usually bends before it breaks, no tests of this phenomenon were made until the great program of experiment on the strength of materials carried out by MUSSCHENBROEK (1729). MUSSCHENBROEK found that the breaking strength is inversely as the square of the length of the column; he reported also a dependence upon breadth and depth which may be correct for breaking but cannot be so for buckling or elastic bending which precedes it. EULER's rigorous determination of all forms that may be assumed in finite deflection of a straight or circular band subject to terminal load is the most brilliant achievement of the theory of elasticity in the century, but it cast light upon the principles only through his incidental discovery of the formula for buckling (1743). His result confirms MUSSCHENBROEK's experimental rule in its dependence upon the length of the column; when the modulus of bending is properly related to the modulus of elasticity, EULER's result gives also the correct dependence upon the shape of the cross-section. LAGRANGE (1770) observed that there is an infinite sequence of buckling loads, at each of which an additional bent form becomes possible, but he did not conjecture which form is actually assumed; he tried to find the shape of column which is strongest for given bulk, but his analysis is wrong (1773). EULER's determination of the height at which a uniformly heavy column buckles (1776, 1778) is a *tour-de-force* of analysis and mechanics but does not advance the basic concepts. EULER found that a stress equal to the buckling stress in compression of a wooden bar would produce, if reversed, a strain of only 0.07%. From this point begins the understanding that enormous loads may produce only minute elastic strains; all older work of any importance concerned finite deformation, and the distinction between large strain and large deflection, essential for the present century, was not seen.

PARENT (1713) extended and corrected JAMES BERNOULLI's analysis of the neutral fibre. He was the first to see how to apply the condition of equilibrium of forces as well as equilibrium of moments to the actions at the cross-section of a beam. Allowing for different moduli of compression and extension, he showed that the areas under the curves representing the tensions and compressions have to be equal. This condition restricts the position of the neutral fibre; for a single linear relation, it shows that the neutral fibre must be the central one. PARENT saw also that forces tangent to the cross-section, corresponding to what are now called *shear stresses*, are possible. EULER throughout his life spoke of the neutral fibre as being on the concave side; this persistent error had no effect on his results concerning elastic curves and buckling, because he never specialized them sufficiently to have any need of using it. JOHN III BERNOULLI showed some understanding of the problem of the neutral line (1766), but the first advance beyond PARENT's work was made by COULOMB (1773), who wrote down all conditions of equilibrium for the forces acting upon the cross-section of a loaded beam. COULOMB proved that shear stress is not only possible but *necessary*; in fact, almost everything he did rested upon hypotheses about it. While GALILEO had associated rupture with a given tensile force, and MARIOTTE with given elongation, COULOMB took a shear stress of given magnitude as his criterion for failure. He showed that the

greatest shear stress in compression occurs along the planes inclined at 45° to the line of action of the load.

The great work of PARENT and COULOMB did not go so far as a theory of elasticity; like the studies of GALILEO and LEIBNIZ, and unlike the more developed analyses of JAMES BERNOULLI and EULER, it was purely statical, neglecting deformation, and too primitive in regard to mathematics to yield a definitive formulation upon which theories could be built.

Before COULOMB's paper was published, EULER had finished a complementary research. One of his earliest essays (1728–1730) had succeeded in using the method of moments to derive a single equation including both the perfectly flexible line and the flexurally elastic band. The work of JAMES BERNOULLI, published later, made it clear that in the perfectly flexible case, any of the general approaches can be applied, and each leads to the same result. For bands, this did not seem to be true. In various trials, all his life long EULER sought to unify the flexible line with the elastic band in every respect, and particularly in regard to the equilibrium of forces. In 1771 he saw, at last, that what was lacking was a proper idea of the force exerted by one part of a general line upon its neighbor. In addition to the tension which alone is present in the perfectly flexible case, there is a normal force, or *shear resultant*. When this is taken into account, the condition of equilibrium of forces may be applied. The result has a threefold importance beyond EULER's immediate aim: (1) Extending the ideas of JAMES BERNOULLI, EULER separated the general principles of mechanics from the constitutive equations for particular materials. His *general equations of equilibrium* for a plane deformable line of any kind are the first example since his "first principles" of a general law of mechanics, independent of ideas defining fluids, flexible bodies, elastic bodies, etc., and alike valid for all. (2) Distinguished from the purely tangential action in the flexible line and from the purely normal pressure of EULER's hydrodynamics, and analogous to the shear stress introduced just afterward by COULOMB, the *general line stress vector* which appears here, unrestricted in direction or magnitude except by the conditions of equilibrium, is the precursor of the stress tensor. (3) It is clearly understood that the condition of balance of moments is *independent* of that of balance of forces. This independence, obscured in much of analytical dynamics but essential for continuum mechanics, is the subject of the next section.

By use of a framework model (1764), EULER had inferred that in torsion the torque is proportional to the sine of the twist, but, intent upon a theory of plates, he had not made any use of this result. COULOMB (1777–1784) carried out extensive experiments on the twisting of silk threads and metal wires, whence he found that the torque is proportional to the twist for small twists. Among his results is the remark that large tension changes the torsional modulus before destroying the linearity of the response. COULOMB made no attempt at a theory of torsion.

While all the ideas necessary for the general theory of stress had been proposed separately by 1773, there was no sign of that other necessary ingredient of a full theory of elasticity, namely, the theory of strain. There was no sign of it, that is, in works on elasticity, where it is needed. In a treatise on the mechanics of perfect fluids, where it is of little importance, EULER (1766) had introduced and

interpreted the tensor of rate of deformation or stretching. Only a change of wording was needed to yield the description of infinitesimal strain later constructed by CAUCHY, but EULER's work on this subject was never noticed.

13. The principle of moment of momentum

It is clear enough that in statics the equilibrium of moments is not assured by the equilibrium of forces, nor *vice versa*. In dynamics, the principle of moment of momentum developed late, and much of the earlier work concerning it gives the impression that the two principles were somehow hoped to be equivalent, so that there would be but a single law of motion. This illusion is fostered in the teaching of mechanics by physicists today.

It will be recalled that HUYGENS' solution for the physical pendulum does not use the principle of moment of momentum at all. Developing an idea latent in JAMES BERNOULLI's great paper of 1703, EULER and DANIEL BERNOULLI in their early work on rigid, linked, or flexible systems frequently invoked the principle of moment of momentum, often disguised by an additional quasi-static assumption. Its importance began to be seen gradually, so that only with difficulty can a particular date be fixed as that in which it rose to the level of a principle of mechanics. I believe the correct date is 1751, the year of publication of EULER's paper of 1744 which has been mentioned above as the first in which the "NEWTONIAN equations" are recognized as sufficient to give all the mechanical principles determining the motion of a complex system, the case in point being the taut loaded string. The latter part of this same paper obtains the equations of motion for a system of n rigid rods linked together and subject to arbitrary forces at the junctions. Here the "NEWTONIAN equations" do not suffice. In addition, EULER sets up as an independent principle the balance of moment of momentum about the center of mass of each rod.

EULER's development of the concept of rotary inertia has been mentioned in § 9, where his first method of deriving the equations of motion of a rigid body was described. The kinematical and dynamical aspects of the problem were not clearly separated there. EULER sought later an approach to mechanics as a whole that would yield directly and easily the equations of motion of a rigid body as a special case. This he achieved in a memoir published in 1776, where he laid down the following laws as applicable to *every part of every body*, whether punctual or space-filling, whether rigid or deformable:

Law 1. The total force acting upon the body equals the rate of change of the total momentum.

Law 2. The total torque acting upon the body equals the rate of change of the total moment of momentum, where both the torque and the moment are taken with respect to the same fixed point.

These laws, which may be called EULER's *laws of mechanics*, imply not only "NEWTON's laws" for mass-points but also all the other principles of classical mechanics and are just as convenient for continuous bodies as for discrete systems. The first law is equivalent to EULER's "first principles" of 1750 and yields the general theorem on the center of mass. The second law follows from it in some cases; for example, if all forces are absolutely continuous functions of mass and

if all torques are the moments of forces; but in more general systems, such as those in which shear stress is present, the second law is independent of the first. For a rigid body, EULER was able to derive his former equations of motion directly and easily from the second law.

The law of moment of momentum is subtle, often misunderstood even today*.

14. The invariance of the laws of mechanics, and Lagrange's *Méchanique Analytique* (1788)

While the principle of "Galilean invariance" is now well known, during the eighteenth century it was felt rather than stated, and discovery of the properties of invariance of the principles of mechanics grew rather from concrete cases than from general studies. In the 1740's DANIEL BERNOULLI, EULER, and CLAIRAUT set up some tricky special problems, such as to determine the motion of a mass-point going down a wedge which is free to slide upon a table, or of a mass-point moving within a curved rigid tube cast in arbitrary initial motion. The principle to be used was stated most clearly by CLAIRAUT in a paper published in 1745; in effect, it is the modern principle of relative motion, according to which a body seen from a non-inertial frame experiences an "apparent force" per unit mass equal to the negative of the acceleration of that frame relative to an inertial frame. In special cases involving motion relative to the non-inertial frame, however, CLAIRAUT did not calculate the relative acceleration correctly. EULER adopted the principle, stated it more clearly, and calculated correctly the solutions of a number of extremely difficult problems. In particular, in his researches on hydraulic machines he obtained what is now called the "CORIOLIS acceleration", expressed in terms of angular variables appropriate to the problem. In an attempt to calculate that acceleration in rectangular Cartesian co-ordinates, for general motion, he fell into error and got but one half of the right amount (1755).

* In presentations of mechanics for physicists it is usually derived as a consequence of "NEWTON's laws" for elements of mass which are supposed to attract each other with mutual forces which are central and pairwise equilibrated. Although the formal steps of this derivation are correct, the result is too special for continuum mechanics as well as methodologically wrong for rigid mechanics:

1. Any forces between the particles of a rigid body never manifest themselves, by definition, in any motion. The condition of rigidity applied to EULER's second law suffices to determine the motion. To hypothesize mutual forces is to luxuriate in superfluous causes, which are to be excised by OCKHAM'S razor.

2. To introduce mutual forces in a rigid body drags in action at a distance in a case when it is unnecessary to do so.

3. In continuum mechanics the total force acting upon a finite body arises principally from the stress tensor, which represents the contiguous action of material on material. There is no physical reason to assume that forces arise only from action at a distance, and no purpose served by doing so. If rigid-body mechanics is viewed as a special case of continuum mechanics, the stress within the rigid body is indeterminate and need never be mentioned, but a uniform process based upon EULER's second law remains possible.

No work of EULER, nor of any other savant of the eighteenth century, approaches rigid bodies by hypothesizing forces acting at a distance as in modern books. EULER's method of discovery tacitly assumes there to be no internal forces at all; the right answer comes out, but we are justified in doubting that the argument be general enough. His final treatment does not make any presumption or restriction regarding the presence or nature of internal forces.

A special potential function was introduced by DANIEL BERNOULLI in connection with the elastic band (1739). JAMES RICCATI (c. 1754) suggested that the work done in deforming an elastic body is available, at least in part, for the recovery of the deformation when the forces are removed, but he gave nothing mathematical based upon this important idea. EULER (1743) showed that DANIEL BERNOULLI's principle of minimum potential energy leads to the equation of the elastic curve, but this is not the same as the principle of conservation.

Two principles proposed by MAUPERTUIS as general statements of the laws of mechanics attracted much notice because they are single and invariant statements about the whole of a system, not breaking it up into parts. The static *law of rest* (1740) is a generalization of the old principle that the center of gravity falls as low as it can; this principle, known to the ancients, had been shown by JAMES BERNOULLI to yield the solution to the catenary problem. MAUPERTUIS introduced the potentials of central forces varying as the n^{th} power of the distance. His dynamic *principle of least action* (1744) takes the "action" of a moving body as the integral of the momentum with respect to distance along the path and asserts that nature wishes to economize as much as possible in dispensing this quantity*. He desired to displace FERMAT's principle in optics, and he succeeded in deriving a number of simple mechanical results from his principle, but he was not a sufficiently able mathematician to put it into general form or to get anything new from it; his formulation is neither clear nor wholly correct.

A special case of the principle of least action was discovered independently by EULER at this time (1743); EULER's statement is clear, and he correctly limits the paths comparison to those consistent with the same total energy. In researches done in 1748 EULER succeeded in putting the law of rest (known nowadays as "DIRICHLET's principle") into fairly general form. In particular, he showed how to calculate the work done by a couple, thus making it possible to apply the principle to an elastic band subject to distributed load.

A general formal statement of the principle of least action for systems of mass-points was first obtained by LAGRANGE (1761), though without the proper restrictions. This is the first case in which an adequate statement of the laws of a fairly extensive branch of mechanics was gotten without the use of an *a priori* concept of force. In his work with continuous systems at this time, LAGRANGE by formal manipulations obtained other variational principles of varying degrees of validity. Potential functions occur in this work, but LAGRANGE never explains any concept, being content to verify the formalism. (The velocity-potential of hydrodynamics and the partial differential equation it satisfies ("LAPLACE's equation") had been introduced in EULER's work on hydrodynamics (1752), but gravitational potentials lay many years in the future.)

In the *Méchanique Analitique* (1788) LAGRANGE succeeded, at last, in formulating a variational principle uniformly valid for most kinds of mechanical systems then known. His formula, called "D'ALEMBERT's principle" in most books today, expresses the *principle of virtual work* with the assigned forces supplemented by "inertial forces" arising from the accelerations, and with the assumption that the

* A closely related idea had been put forward by LEIBNIZ. For a review of the controversy over the principle of least action, see J.O. FLECKENSTEIN'S Introduction to L. Euleri Opera Omnia (2) 5.

constraints do no work. For systems of mass-points, LAGRANGE then introduced "generalized co-ordinates" and achieved the invariant formulation of analytical dynamics now called "LAGRANGE'S equations".

Much has been said in praise of these equations, which belong to the only part of the mechanics of the eighteenth century that is reasonably well known today. Their importance for later work in analytical mechanics and in modern physics is clear. Less clear, perhaps, is that abstractness of formulation conceals the main conceptual problems of mechanics: The role of inertial frames and the concept of rigidity, essential to the classical idea of "observer", are hidden in the invariance of the algebra.

It is true that LAGRANGE'S equations have the same form in all descriptions, but it is not true that a system of differential equations in LAGRANGE'S form necessarily belongs to a dynamical system satisfying EULER'S laws in some frame, let alone an inertial frame. By obscuring the forces, LAGRANGE'S equations conceal the invariance group of classical mechanics, which is immediately plain from EULER'S equations. Moreover, LAGRANGE'S equations do not reflect the space-time geometry of classical mechanics, the main property of which is the possibility of adding together vectors localized at different points. Without this distant parallelism, we may speak of energy, but we cannot even form those other basic quantities of classical mechanics, momentum, center of mass, and moment of momentum. From LAGRANGE'S equations, we cannot tell whether a system has momentum or not; from EULER'S equations, it is obvious that it does, and this is borne out by the fact that the general integrals of linear momentum first appear in treatments based upon EULER'S formulation. In any case, LAGRANGE'S equations are relevant only to special kinds of mechanical systems and are far less general than EULER'S laws or than LAGRANGE'S principle of virtual work.

Something regarding the *Méchanique Analytique* itself must also be said. Its object was expressed by LAGRANGE as follows:

There are already several treatises on mechanics, but the plan of this one is entirely new. I have set myself the task of reducing the theory of this science, and the art of solving the problems concerned with it, to general formulae, the simple development of which gives all the equations necessary to the solution of each problem.

Its method is purely algebraic:

No drawings are to be found in this work. The methods which I present require neither constructions nor geometrical or mechanical arguments, but only algebraic operations, subject to a regular and uniform progress.

Like the first half of Book I of NEWTON'S *Principia*, it is largely a retrospective work, ordering within a single formal scheme a selection from the discoveries of the immediately preceding generations. In the main, the results presented are slight generalizations of some of EULER'S, set within LAGRANGE'S severely formal style. Also like Book I of the *Principia*, it contains a major discovery, namely, the LAGRANGEAN equations for systems of mass-points. But there is nothing corresponding to Books II and III of the *Principia*, nothing looking forward rather than backward, and no comparison of theoretical and observed values. Mechanics appears as a physically closed subject, a branch of the theory of differential equations.

At the end of the century there was a dismaying tendency to turn away from the basic problems, both in mechanics and in pure analysis. Directly contrary to the great tradition set by JAMES BERNOULLI and EULER, this formalism grew rapidly in the French school and is reflected in the *Méchanique Analitique*. Much of the misjudgment that historians and physicists have passed upon the work of the eighteenth century comes from unwillingness to look behind and around the *Méchanique Analitique* to the great work of EULER and the BERNOULLIS which was left unmentioned. As its title implies, the *Méchanique Analitique* is not a treatise on rational mechanics, but rather a monograph on one method of deriving differential equations of motion, mainly in the special branch now called, after it, analytical mechanics. This may account for its failure to include any concrete solutions for the vibrating string*, the tones and nodes of bars and membranes, the shape of elastic curves, the flow of fluids in tubes, etc., or to mention such fundamental concepts as relative motion, stress, strain, elastic modulus, neutral line, instability of equilibrium, wave propagation, etc., although all these solutions and concepts may be found in the literature of the generation preceding LAGRANGE'S.

Granted its more modest scope, estimates of LAGRANGE's performance must remain a matter of taste. In music, in painting, in literature, tastes have changed in the past century. Why should they not also change in mechanics? The historians delight in repeating HAMILTON's praise of the *Méchanique Analitique* as "a kind of scientific poem", but it is unlikely that many persons today would find HAMILTON's recommendations in non-scientific poetry congenial.

15. Retrospect: Experience, theory and experiment in the Age of Reason

The true nature of mechanics in the Age of Reason I have attempted to display in outline, to the best of my ability to read and survey the hundreds of mathematical papers and books in which this luxuriant growth of the aims, methods, and results of mathematical physics, never before or since equalled, was triumphantly recorded. He who is trained in physics today will ask, what were the fundamental experiments upon which "classical" mechanics was founded?

I have never been able to find any. In the books physicists write on the history of physical experiment, little mention is made of the period between NEWTON and LAGRANGE, and much of the little that is said turns out to be a description, after all, of theory or of *a posteriori* verification at best. Two examples may be noted here. First, while there had been experiment enough in regard to the oscillation of pendulums in HUYGENS' day, when it came to the general motion of a rigid body there is no evidence that any experiment was even suggested; once an exact solution was obtained, the only function of measurement could be to estimate the magnitude of the frictional forces or the defect from perfect rigidity; and in the 200 years since EULER derived his equations, no direct experimental test of them has ever been proposed, so far as I know, but they are applied and verified indirectly in hundreds of devices later designed by use of them. For a second example, consider MUSSCHENBROEK's discovery of the law of buckling; there is no evidence that EULER knew of it when he derived his buckling formula, and comparisons were not made for another twenty years; moreover, the structural

* Something about it was added in the second edition.

engineers for more than a century following seemed not to know of MUSSCHENBROEK's tests, for they sneered at EULER's result as a piece of useless pure mathematics. It is unlikely that today there is a bridge designed anywhere without some use of the MUSSCHENBROEK-EULER formula.

What was, then, the method? Rational mechanics was a science of *experience*, but no more than geometry was it *experimental*. While some great mechanical experiments were done in the Age of Reason, they had only occasional bearing on the growth of the theories we now regard as classical. Experiment and theory result from different kinds of reaction to experience. If, ideally, they should complement and check one another, yet even today, with all our superior knowledge not only of facts but also of scientific method, it is difficult enough to relate them, so why should it have been easier 300 years ago? It was not. A factual view of the history of mechanics must concede that rational mechanics and experimental mechanics, both arising from human beings' intelligent reaction to mechanical experience, grew up separately.

Not only private, individual experimental researches were performed in the eighteenth century; there were also large, cooperative projects. As today, they cost more than real science, and they attracted administrators. But the effect of all this expense on what we now consider the achievement of the period was nil. The method used in the great researches was entirely mathematical, but the result was not what would now be called pure mathematics. *Experience* was the guide; *experience*, physical experience and the experience of accumulated previous theory. If we were to seek a word for what was done, it would not be physics and it would not be pure mathematics; least of all would it be applied mathematics: it would be *rational mechanics*.

This paper was written during the author's tenure of a Fellowship of the U.S. National Science Foundation. It includes material given in a Sigma Xi lecture at Indiana University (1951), public lectures at Brown University (1955) and at the State University of Iowa (1956), and a lecture to the Research Society of the Socony-Mobil Laboratory at Dallas (1960).

References

The following historical works, easily accessible to the general reader, give quotations, details, and citation of the original works used for some parts of the foregoing article. For other parts, as explained in the Introduction, no adequate detailed history is presently available.

- JOUGUET, E.: *Lectures de mécanique*, 2 vols. Paris: Gauthier-Villars 1908, 1909,
x + 210 + 284 pp.
- DUGAS, R.: *La mécanique au XVII^e siècle*. Neuchatel: Ed. du Griffon 1954. 620 pp.
- TRUESDELL, C.: *Rational fluid mechanics, 1687—1765*. L. Euleri Opera Omnia (2) 12,
IX—CXXV (1954).
- TRUESDELL, C.: I. The first three sections of EULER's treatise on fluid mechanics
(1766); II. The theory of aerial sound (1687—1788); III. Rational fluid mechanics
(1765—1788). L. Euleri Opera Omnia (2) 13, VII—CXVIII (1956).
- TRUESDELL, C.: *The rational mechanics of flexible or elastic bodies, 1638—1788*.
L. Euleri Opera Omnia (2) 11₂, 428 pp. (1960).

Istituto Matematico
Università di Bologna

(Received July 20, 1960)

Anfänge des euklidischen Axiomensystems

ÁRPÁD SZABÓ

Vorgelegt von B. L. VAN DER WAERDEN

In Memoriam K. Reinhardt 1886—1958

	Seite
Einleitung	38
I. Die Terminologie des PROKLOS und der Euklid-Text	40
II. Die <i>ὑπόθεσις</i>	43
1. Die <i>ὑπόθεσις</i> als „Grundlage“	43
2. Der Ausdruck <i>ἐξ ὑπόθεσεως</i>	44
3. <i>συγχώρησον</i> und <i>συμβάλνειν</i>	45
4. Ob eine <i>ὑπόθεσις</i> willkürlich gewählt werden kann?	47
5. Die Mathematik als PLATONS Vorbild	49
6. Die innere Verwandtschaft der dialektischen und mathematischen Methode	49
7. Ein platonisches Beispiel für die <i>ὑπόθεσις</i> -Anwendung	50
8. Die beiderlei Arten von <i>ὑπόθεσις</i>	51
9. Die <i>ὑπόθεσις</i> und das indirekte Beweisverfahren	52
10. Ob die Dialektik oder ob die Mathematik das ältere Anwendungsgebiet war?	54
11. Ein negatives Beispiel und eine Gefahr von circulus vitiosus	55
12. Die älteste Quelle: ZENON	57
13. Woher schöpfte ZENON?	58
14. Die doppelte <i>ὑπόθεσις</i> -Anwendung	59
15. Die <i>ὑπόθεσις</i> als „Grundlagen“ in der vorplatonischen Mathematik .	62
III. Die <i>ἀτήματα</i> und <i>ἀξιώματα</i>	65
1. Was heißt ein <i>ἀτῆμα</i> ?	65
2. Was heißt ein <i>ἀξίωμα</i> ?	67
3. Die euklidische Unterscheidung und die antiken Erklärungsversuche .	70
4. PLATONS <i>ὅμολογήματα</i> und EUKLIDS <i>ἀξιώματα</i>	73
5. Das Problem der euklidischen <i>ἀτήματα</i>	78
6. Die Konstruktionen des OINOPIDES	80
7. Die ersten drei Postulate bei EUKLID	82
IV. EUKLIDS dreifache Unterscheidung der Prinzipien	85
1. Die mangelhafte Grundlegung der Arithmetik	85
2. Die Wissenschaft vom Raum	86
3. PLATON über den Raum und über die Geometrie	87
4. Die Grundlegung der Geometrie	91
5. Zur Frage der Chronologie	93
V. Probleme der frühgriechischen Mathematik in neuer Beleuchtung	95
1. Konstruktion und mathematische Existenz	95
2. „La réforme platonicienne“	99
Anhang	104

Einleitung

Das historische Problem des Entstehens der systematischen und deduktiven Mathematik der Griechen ist besonders in der letzten Zeit in den Vordergrund des Interesses gerückt worden. Dies ist hauptsächlich der Tatsache zuzuschreiben, daß man die vorgriechische Mathematik besser kennenernte. Wie man darüber zuletzt schreiben konnte: „Entdeckungen und Untersuchungen der letzten Jahrzehnte haben gezeigt, daß die vorgriechische babylonische Mathematik sehr viel weiter entwickelt war, als vorher angenommen wurde, und daß die Babylonier etwa tausend Jahre vor dem Beginn der griechischen Mathematik imstande waren, verhältnismäßig komplizierte Aufgaben mit ziemlich guten Approximationen zu lösen. Es hat sich auch gezeigt, daß die Griechen manches von den Babylonier übernommen und gelernt haben.“¹ — Man würde also im Sinne dieser Tatsachen zweifellos mit Recht erwarten, daß auch die systematische und deduktive Mathematik der griechischen Periode wohl eine Art Fortsetzung oder Weiterbildung der älteren, vorgriechischen Mathematik darstellen könnte. Aber es mußte statt dessen nachdrücklich betont werden: „Nirgends hat sich ein Zeichen dafür gefunden, daß die Babylonier oder gar die Ägypter jemals den Versuch gemacht hätten, alle mathematischen Sätze streng logisch von ersten Prinzipien abzuleiten.“² Freilich gab es Forscher, die den augenblicklichen Mangel an Dokumenten dafür, daß eine Art deduktiver Mathematik auch schon in der vorgriechischen Zeit existiert hätte, für einen bloßen Zufall hielten. So schrieb z. B. B. V. GNEDENKO: „Wohl wird es durch künftige archäologische Entdeckungen ermöglicht, daß man die Anfänge deduktiver Ableitungen in der Mathematik nicht nur bei den Alten Griechen, sondern auch bei den Völkern des nahen Ostens wiederfindet.“³ Aber die nackten Tatsachen scheinen eine solche Erwartung vorläufig gar nicht zu rechtfertigen. Im Gegenteil! Ein jeder unvoreingenommener Betrachter der Tatsachen wird sich eher der Meinung anschließen müssen: „Alles, was bis jetzt über die vorgriechische Mathematik der Völker des alten Orients bekannt ist, läßt es als äußerst unwahrscheinlich, um nicht zu sagen, unmöglich erscheinen, daß der Eindruck, es habe vor den Griechen derartiges gar nicht gegeben, nur auf die Lückenhaftigkeit unseres Wissens zurückzuführen wäre.“⁴

Die systematische, deduktive Mathematik scheint also eine Schöpfung der Griechen gewesen zu sein. Wie wurde nun das Zustandekommen dieser Wissenschaft bisher erklärt?

Manche Forscher begnügten sich in dieser Beziehung mit dem bloßen Hinweis auf die gesellschaftlichen Verhältnisse bei den Griechen zu jener Zeit, in der die

¹ FRITZ, K. v.: Die APXAI in der griechischen Mathematik. Archiv f. Begriffsgeschichte (herausg. v. E. ROTHACKER), Bd. 1. Bonn 1955. Vgl. O. NEUGEBAUER, Zur geometrischen Algebra, Quellen u. Studien zur Gesch. d. Math. etc. B3 (1936) 245ff. und B. L. V. D. WAERDEN, Erwachende Wissenschaft, Basel-Stuttgart 1956.

² Ebd. 13–14.

³ GNÉDÉNKO, B. V., et I. B. POGREBISSKI: Sur la valeur d'histoire des mathématiques pour les mathématiques et les autres sciences (russ.), Istoriko-matematicheskie Issledovaniya (ed. G. Ph. RYBKA et A. P. YOUCHKEVITCH, Moscow) XI, 1958, 441–460.

⁴ FRITZ, K. v.: o. c. 14. Vgl. O. BECKER, Grundlagen der Mathematik in gesch. Entwicklung, Freiburg-München 1954, 22, und O. BECKER, „Frühgriech. Math. u. Musiklehre (Archiv f. Musikwissenschaft 14, Trossingen 1957, 157).

deduktive Mathematik vermutlich entstehen konnte. Der Anspruch auf tadellose mathematische Beweise wäre im Sinne dieser Erklärung darauf zurückzuführen, daß in der griechischen Demokratie Redefreiheit herrschte, und daß eben deswegen die streitenden Parteien — sowohl im politischen Leben als auch im Gerichtsverfahren — sich bald daran gewöhnten, für ihr Recht mit *Argumenten* zu kämpfen. Das Argumentieren im alltäglichen Leben wäre also einst das Vorbild für das Beweisen in der Mathematik gewesen⁵.

Andere wollten das plötzliche Auftreten von mathematischen Theoremen mit Beweisen konkreter damit erklären, daß die Griechen oft eine nicht immer einheitliche orientalische Tradition übernahmen. Zum Beispiel wurde in Babylonien der Inhalt des Kreises nach einer gewissen „Formel“ $[3r^2]$ berechnet, während man in Ägypten für dasselbe eine von der vorigen abweichende Rechenvorschrift $[\frac{8}{9} \cdot 2r]^2$ benutzte. Aus der Abweichung dieser beiden — und selbstverständlich auch vieler ähnlicher bloß empirischer Regeln — hätte sich für die Griechen die Notwendigkeit einer kritischen Entscheidung ergeben, und damit wäre also der Ursprung der systematischen Wissenschaft zu erklären⁶. — Diese letztere Art Erklärung versucht also jene entscheidende Wandlung, die in der Mathematik dadurch eintrat, daß die bis dahin bloß praktisch-empirischen Kenntnisse zu einem echten wissenschaftlichen System wurden, auf solche Ansprüche zurückzuführen, die sich gewissermaßen aus der Mathematik selbst ergaben. Die Mathematik hätte also ihre eigentliche und definitive Gestalt sozusagen aus sich selbst heraus für sich gebildet⁷. Es scheint, daß dieselbe Ansicht auch schon in mehreren Varianten zu Worte kam⁸.

Eine andere Gruppe bilden jene Erklärungsversuche, die den Ursprung der deduktiven Mathematik auf die Philosophie zurückführen wollten. Lange Zeit hindurch sprach man z. B. von einer sog. „platonischen Reform“ der Mathematik. Die Mathematik wäre in der Zeit vor dieser Reform *empirisch* gewesen, und erst in der Zeit nach derselben sei sie *theoretisch* geworden⁹. Mit anderen Worten heißt diese Behauptung natürlich auch so viel, daß das Entstehen der systematischen und deduktiven Mathematik dem Einfluß der platonischen Philosophie zuzuschreiben sei. — Diese Ansicht scheint in der allerletzten Zeit — beinahe unmerklich — einer anderen, ihr nur verwandten Auffassung den Platz geräumt zu haben. Man wollte nämlich, anstatt von einer „platonischen Reform“ der Mathematik zu sprechen, eher die angeblich bedeutende Rolle des ARISTOTELES in der theoretischen Grundlegung der Mathematik hervorheben¹⁰.

In dieselbe Gruppe der Erklärungsversuche gehört auch meine eigene Theorie über den Ursprung der deduktiven Mathematik. Denn ich habe in der letzten Zeit in mehreren Aufsätzen die Ansicht vertreten, daß die älteste deduktive Mathematik der Griechen einer Anregung der eleatischen Philosophie zu verdanken

⁵ In diesem Sinne: A. N. KOLMOGOROV in der Großen Sowjet-Enzyklopädie s. v. „Mathematik“ (russ.).

⁶ WAERDEN, B. L. V. D.: o. c. 147; vgl. O. BECKER, Gnomon 23, 1951, 297ff.

⁷ Vgl. dazu das Zitat von O. TOEPLITZ am Ende des vorliegenden Aufsatzes.

⁸ Eine Variante dieser Ansicht scheint auch K. REIDEMEISTER, Das exakte Denken der Griechen, Hamburg 1949, 52, zu vertreten.

⁹ Vgl. dazu den letzten Abschnitt in Kap. V der vorliegenden Untersuchung.

¹⁰ FRITZ, K. v.: o. c.

sei¹¹. Zu dieser Vermutung führten mich außer chronologischen Überlegungen hauptsächlich zwei Beobachtungen. *Erstens* hat mich das häufige Auftreten des sog. indirekten Beweises in der griechischen Mathematik des 5. Jahrhunderts auf den Gedanken gebracht, daß eine deduktive Mathematik ohne die Kenntnis des indirekten Beweisverfahrens auch gar nicht möglich sei¹². Und doch läßt sich das Entstehen dieser Art von Beweisführung innthalb einer anfänglichen, rein praktisch-empirischen Mathematik kaum erklären. Um so leichter war es, diese Denkweise als ein aus der Philosophie der Eleaten übernommenes Gedankengut darzustellen. *Zweitens* drängte mich zu derselben Vermutung auch eine historische Untersuchung über die Entwicklung des mathematischen Evidenz-Begriffes¹³. Ich glaube nachgewiesen zu haben, daß die Evidenz in der ältesten griechischen Mathematik rein empirisch-anschaulicher Art war. Aber das Streben nach dieser primitiven Evidenz wurde noch im 5. Jahrhundert durch eine anti-empirische und anschauungswidrige Tendenz abgelöst. Diese merkwürdige Tendenz trat Hand in Hand mit den ersten Anwendungen des indirekten Beweisverfahrens auf, und ließ sich ebenfalls als der Einfluß der eleatischen Philosophie erklären. — Im Anschluß an diese Erkenntnisse untersuchte ich zuletzt in zwei verschiedenen Aufsätzen die älteste definitorisch-axiomatische Grundlegung der Mathematik¹⁴. Ich konnte in diesen meinen letzten Arbeiten den eleatischen Ursprung von mehreren Definitionen der Arithmetik im VII. Buch der euklidischen „Elemente“ mit großer Wahrscheinlichkeit nachweisen. Ebenso hoffe ich gezeigt zu haben, daß das 8. euklidische Axiom („das Ganze ist größer als der Teil“) gegen ein Paradoxon des Eleaten ZENON („die halbe Zeit ist der doppelten gleich“) aufgestellt werden mußte.

In der vorliegenden Arbeit untersuche ich die Ursprungsfrage der systematischen Mathematik von der *Terminologiegeschichte* her. Es wird also hier der Ursprung der griechischen Ausdrücke für drei Termini der euklidischen Mathematik — *definitiones*, *postulata* und *communes animi conceptiones*¹⁵ — vorwiegend mit philologischer Methode geprüft. Die Ergebnisse dieser Untersuchung scheinen mir meine frühere Theorie über das Entstehen der deduktiven Mathematik weitgehend zu bestätigen.

I. Die Terminologie des Proklos und der Euklid-Text

In unserem Euklid-Text heißen die Definitionen *δοι*, die Postulate *αἰτήματα* und die sog. „Axiome“ *κοινῶνι εὑροτά*. Vergleicht man nun diese drei griechischen Termini mit denjenigen Ausdrücken, mit denen PROKLOS in seinem Euklid-Kom-

¹¹ Szabó, Á.: „Eleatica“ (Acta Ant. Scient. Hung. III. Budapest 1955, 67–103); „Wie ist die Math. zu einer deduktiven Wissenschaft geworden?“ (ebd. IV, 109–152); „Deiknymi, als math. Terminus für *beweisen*“ (Maia, Rivista di Letterature class., Nuova Serie X, 1958, 106–131).

¹² „Wie ist die Math. zu einer deduktiven Wissenschaft geworden?“ a. a. O. 140ff.

¹³ „Deiknymi, als math. Terminus etc.“ a. a. O.

¹⁴ „Die Grundlagen in der fröhgriech. Mathematik“, Studi Italiani di Filologia Classica XXX, Firenze 1958, 1–51. Eine erweiterte und revidierte Form desselben Aufsatzes erscheint demnächst in der Zeitschr. Osiris unter dem Titel: „Der älteste Versuch einer definitorisch-axiomatischen Grundlegung der Mathematik.“

¹⁵ Mit diesen Worten werden die betreffenden Termini in der lateinischen Übersetzung der Heibergschen Textausgabe (EUCLIDES, Elementa, ed. J. L. HEIBERG, vol. I. Lipsiae 1883) wiedergegeben.

mentar dieselben drei Gruppen von Prinzipien bezeichnet, so fällt zunächst auf, daß PROKLOS nur im Falle der Postulate konsequent dasselbe Wort wie EUKLID (*αἰτήματα*) benützt, sonst aber seine Terminologie — bis zu einem gewissen Grade — schwankend ist. Es ist z.B. gar nicht zu bezweifeln, daß PROKLOS zwar auch den Namen *κοινάὶ ἔργοιαὶ* kannte¹⁶, aber dennoch bezeichnete er gewöhnlich die unter diesem Namen zusammengefaßten unbewiesenen Sätze der Euklid-Handschriften nicht mit diesem Ausdruck, sondern er benannte diese immer als *ἀξιώματα*¹⁷, obwohl dies letzteres Wort aus unseren Euklid-Handschriften gar nicht bekannt ist.

Nun scheint der Ausdruck *κοινάὶ ἔργοιαὶ* in der Tat — wie dies auch P. TANNERY schon richtig erkannte¹⁸ — erst späteren stoischen Ursprungs zu sein. Die Stoiker bezeichneten als *κοινάὶ ἔργοιαὶ* die „allen Menschen gemeinsamen Vorstellungen“¹⁹, und diese Bezeichnung paßt ihrem Inhalt nach ohne Zweifel auch auf jene unbewiesenen Sätze des Euklid-Textes, die unter demselben Namen zusammengefaßt sind²⁰. Auf der anderen Seite ist das Wort des PROKLOS für dieselben Prinzipien, *ἀξιώματα*, schon aus der voreuklidischen Zeit bekannt. ARISTOTELES spricht mehrere Male von den Axiomen der Mathematiker²¹, ja er zitiert sogar öfters und gerade unter diesem Namen auch jenen unbewiesenen Satz, der bei EUKLID als dritte *κοινὴ ἔργον* überliefert ist: „wenn Gleiches von Gleichen abgezogen wird, sind die Reste gleich“²². Diese Tatsache legt die Vermutung nahe, daß die alte Bezeichnung der euklidischen *κοινάὶ ἔργοιαὶ* eben *ἀξιώματα* gewesen sei. Wohl diesen Namen, *ἀξιώματα*, las auch PROKLOS noch in seinem Euklid-Exemplar, darum benützt er immer so konsequent dieses Wort, als stünde es auch bei EUKLID so. Dagegen ist der Ausdruck *κοινάὶ ἔργοιαὶ* wohl nur in jenem Zweig der Euklid-Überlieferung an die Stelle der alten Bezeichnung (*ἀξιώματα*) getreten, auf den unser Text zurückgeht. — Man kann auch den Grund dieses Namenwechsels erklären. Das Wort *ἀξιώματα* hatte manchmal schon bei ARISTOTELES auch die allgemeinere Bedeutung: „Annahme“, „Meinung“, „Lehrstück“ usw.²³; daraus entwickelte sich später der bei den Stoikern übliche Gebrauch des Wortes *ἀξιώματα* zur Bezeichnung des *Aussagesatzes* überhaupt²⁴. Derjenige also, der die euklidischen Axiome nachträglich mit dem stoisch klingenden Namen *κοινάὶ ἔργοιαὶ* bezeichnete, wollte diese Sätze gerade von den stoischen *ἀξιώματα* unterscheiden.

¹⁶ Siehe z.B. PROCLI, Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum comm. (ed. G. FRIEDELIN, 1873) 194, 8—9.

¹⁷ Zum Beispiel PROCLUS (F) 76,6; 77,1; 178,2 et passim.

¹⁸ TANNERY, P.: Sur l'authenticité des axiomes d'Euclide, Mémoires Scientifiques (publ. par J. L. HEIBERG-H. G. ZEUTHEN, Toulouse-Paris 1912) II 6C (ein Aufsatz aus dem J. 1884).

¹⁹ Vgl. Stoicorum Veterum Fragmenta, ed. H. v. ARNIM, II 154ff. und III 51, 41.

²⁰ Die Bemerkung von P. TANNERY (Mém. Scient. II 60), daß diese Sätze griechisch eigentlich *κατὰ τὴν κοινὴν ἔργον* oder irgendwie ähnlich heißen sollten, ist zweifellos richtig. So gebraucht den Ausdruck auch Proclus (F) 76, 16. Aber als elliptische Bezeichnung können *κοινάὶ ἔργοιαὶ* auch in sich mit ebenso viel Recht bestehen.

²¹ Zum Beispiel Met. Γ 3 1005 a 20.

²² Met. K 4 1061 b 20; vgl. diese Stelle mit Met. Γ 3 1005 a 19ff.

²³ Vgl. K. v. FRITZ, o. c. 35.

²⁴ Vgl. Stoicorum Vet. Fragm. ed H. v. ARNIM, II nr. 193—220.

Ähnlich verhält es sich — bis zu einem gewissen Grade — auch mit dem euklidischen Terminus für die Definitionen: *ὅροι*. PROKLOS kennt auch diesen Ausdruck, ja er gebraucht ihn auch ohne Umstände²⁵, aber dennoch erscheint bei ihm öfters ein anderer Terminus für die euklidischen Definitionen, nämlich: *ὑποθέσεις*²⁶. Dieser Wortgebrauch des PROKLOS ist eigentlich noch auffallender als der andere, daß er nämlich auch die *κοιναὶ ἔργα* mit dem aus EUKLID gar nicht bekannten, älteren Terminus *ἀξιώματα* benannte. Denn man konnte sich im Falle der Axiome mindestens auf ARISTOTELES berufen; eben ARISTOTELES war ja unser Zeuge dafür, daß der mathematische Terminus *ἀξιώματα* für die *κοιναὶ ἔργα* älteren, voreuklidischen Ursprungs ist. Dagegen könnte man die Ersetzung der euklidischen Bezeichnung *ὅροι* bei PROKLOS mit der anderen: *ὑποθέσεις* nicht mit einer Berufung auf ARISTOTELES erklären. Denn ARISTOTELES protestierte ja gerade dagegen, daß man die *ὅροι* als *ὑποθέσεις* bezeichne²⁷.

Und dennoch gibt es Belege dafür, daß der Wortgebrauch des PROKLOS — Definitionen = *ὑποθέσεις* — gar nichts Ungewöhnliches war. Im Gegenteil! Es ist sehr wohl möglich, daß in dem Euklid-Exemplar von PROKLOS an der Stelle des Namens *ὅροι* ebenso das Wort *ὑποθέσεις* stand, wie daselbst auch die *κοιναὶ ἔργα* noch den älteren Namen: *ἀξιώματα* trugen. Man kann sich nämlich nicht nur darauf berufen, daß auch noch in der nacheuklidischen Zeit ARCHIMEDES — in seiner Schrift „De conoidibus et sphaeroidibus“ — das Wort *ὑποτίθεσθαι* in der Form *ὑποτιθέμεθα* mehrfach gebrauchte um Definitionen einzuführen²⁸; außerdem haben wir auch eine PLATON-Stelle, wo lauter arithmetische und geometrische Definitionen als *ὑποθέσεις* der Mathematiker bezeichnet werden²⁹. Es scheint also in der Tat, daß in der älteren Terminologie der griechischen Mathematik das Wort *ὑποθέσεις* auch als ein Name für Definitionen gelten konnte. — Natürlich wird man daraus nicht gleich auch schließen wollen, daß der Name *ὅροι* ebenso erst später anstatt *ὑποθέσεις* in den Euklid-Text eingeführt worden sei, wie die Bezeichnung *κοιναὶ ἔργα* nur unter stoischem Einfluß an die Stelle der *ἀξιώματα* trat. Das Wort *ὅροι* für Definitionen läßt sich schon aus PLATON belegen. Es scheint also nur, daß in alter Zeit die mathematischen Definitionen sowohl *ὅροι* als auch *ὑποθέσεις* heißen konnten. Darum läßt sich auch die Annahme, daß in dem alten Euklid-Text des PROKLOS die Definitionen vielleicht *ὑποθέσεις* und nicht *ὅροι* genannt waren, nur mit dem Wortgebrauch des PROKLOS einigermaßen begründen³⁰. Man hat nämlich in der Antike auch in diesem Punkt — wie es sich bald zeigen wird — die Terminologie eigentlich nie völlig festlegen können.

Die angedeuteten Schwankungen der Terminologie sind für die historische Forschung sehr lehrreich. Man kann nämlich an Hand einer geschichtlichen Prüfung

²⁵ Zum Beispiel PROCLUS (F) 81, 26.

²⁶ PROCLUS (F) 76, 4ff.; 178, 1ff.

²⁷ ARISTOTELES: An. post. I 10: „Die Definitionen (*ὅροι*) sind keine Hypothesen (*ὑποθέσεις*), denn sie sagen ja über Sein und Nichtsein nichts aus, sondern die Voraussetzungen liegen in den Prämissen.“

²⁸ ARCHIMEDES: Opera omnia (ed. J. L. HEIBERG, 1910) I 248, 252; in dem Dedikationsbrief an DOSITHEOS. Vgl. K. v. FRITZ, o. c. 57.

²⁹ PLATON: Resp. VI 510 C—D.

³⁰ Besonders auffallend ist dieser Wortgebrauch des PROKLOS an den Stellen, die oben in Anm. 26 angeführt wurden. In PROCL. 76, 15ff. wird sogar die Definition des Kreises als ein Beispiel für die *ὑπόθεσης* genannt.

dessen, in welchen Zusammenhängen die einzelnen Fachausdrücke ursprünglich gebraucht wurden, und wie man diese später in die mathematische Terminologie übernahm, mindestens einige Phasen des Entwicklungsprozesses der mathematischen Axiomatik rekonstruieren. Darum will ich im folgenden einige Fachausdrücke der mathematischen Axiomatik eingehender untersuchen.

II. Die *ὑπόθεσις*

1. Es empfiehlt sich, diese Betrachtungen mit dem Wort *ὑπόθεσις* selbst zu beginnen. — Die Etymologie des Wortes scheint auf den ersten Anblick nicht sehr viel zu verraten. *Ὑπόθεσις* heißt das, was *daruntergelegt* wird (*ὑπό* und *τίθεσθαι*), was also als Grundlage von etwas anderem gelten kann. Um so interessanter sind die Gebrauchsarten dieses Wortes³¹. Denn es wurden ja im vorigen Kapitel einige mathematische Stellen von PLATON, ARCHIMEDES und PROKLOS erwähnt, an denen das Wort *ὑπόθεσις* ohne Zweifel „Definition“ und das Verbum *ὑποτίθεσθαι* „definieren“ hieß. Aber es wäre dennoch ein Irrtum zu glauben, daß dasselbe Wort in der mathematischen Terminologie der Griechen nur diese sozusagen spezielle Bedeutung besaß. Viel häufiger wird in der mathematischen Literatur sowohl das Hauptwort (*ὑπόθεσις*) als auch das entsprechende Zeitwort in einem allgemeineren Sinne gebraucht. Es heißt z.B. bei PROKLOS an einer besonders wichtigen Stelle seiner Erörterungen:

„Da wir behaupten, daß diese Wissenschaft, die Geometrie, auf Voraussetzungen beruhe (*ἐξ ὑποθέσεως εἰναι*) und von bestimmten Prinzipien aus die Folgerungen beweise, ..., so muß unbedingt der Verfasser eines geometrischen Elementarbuches gesondert die Prinzipien der Wissenschaft lehren und gesondert die Folgerungen aus den Prinzipien.“³².

Es unterliegt keinem Zweifel, wie in diesem Zusammenhang der Ausdruck *ἐξ ὑποθέσεως* zu verstehen sei. Das Wort *ὑπόθεσις* ist hier eine zusammenfassende Bezeichnung für alle Arten von Voraussetzungen, die die unbewiesenen Grundlagen der Mathematik bilden. PROKLOS spricht ja an der angeführten Stelle von dem *hypothetischen* Charakter der Mathematik — die Mathematik ist eine „Wenn-So-Wissenschaft“, deren Voraussetzungen, die *ἀρχαί*, die also auch *ὑπόθεσις* heißen könnten³³, nicht bewiesen werden. Diese andere Bedeutung des Wortes — *ὑπόθεσις* = Grundlage der Mathematik im allgemeinen — ist ebenso alt, wie die vorhin genannte: *ὑπόθεσις* = mathematische Definition. Die zwei zu unterscheidenden Gebrauchsarten dieses Terminus gehen nicht allein aus dem Wortgebrauch des PROKLOS hervor. Derselbe PLATON, dessen Wortgebrauch vorhin zeigte, daß zu seiner Zeit *ὑπόθεσις* als ein Name für mathematische Definitionen gelten konnte, scheint auch diese andere, allgemeinere mathematische Bedeutung desselben Ausdrückes sehr wohl zu kennen.

³¹ Selbstverständlich beschäftigen wir uns in diesem Zusammenhang nur mit dem mathematisch-philosophischen Terminus *ὑπόθεσις*.

³² PROCLUS (F) 75, 6ff. Die Übersetzung der Stelle nach O. BECKER, Grundlagen der Mathematik, Freiburg-München 1954, 99f.

³³ In der Tat betont einmal auch PROKLOS (F, 77, 2): *πολλάκις δὲ καὶ πάντα ταῦτα* (scil. *τὰς ἀρχὰς τῆς ἐπιστήμης*) *καλοῦσιν ὑπόθεσις*.

2. Im platonischen Dialog „Menon“ wird z.B. die Frage behandelt, ob die Tugend lehrbar ist³⁴. SOKRATES möchte zunächst untersuchen, *was* die Tugend ist; da aber sein Gesprächspartner zu ungeduldig ist, und gleich die Hauptfrage angreifen will, schlägt SOKRATES ein Kompromiß vor: „erlaube mir die Frage auf Grund einer Voraussetzung zu prüfen“ (*συγχώρησον ἐξ ὑποθέσεως ἀντὸ σκοπεῖσθαι*, Men. 86 E 3), und er erläutert dieses „hypothetische Verfahren“ durch ein geometrisches Beispiel: „ich sage: auf Grund einer Voraussetzung, wie manchmal auch die Geometer ihre Untersuchungen führen“ (*λέγω δὲ τὸ ἐξ ὑποθέσεως ὅδε, ὥσπερ οἱ γεωμέτραι πολλάκις σκοποῦνται*). — Schon diese Worte zeigen deutlich genug, eine wie große Rolle zu PLATONs Zeit die *ὑπόθεσις* und das „hypothetische Verfahren“ in der Mathematik spielen mußte. SOKRATES kann sich ja bei seinem Versuch gerade darum auf das Vorbild der Geometer berufen, weil diese — wie er sagt — dieselbe Methode häufig anwenden.

Noch lehrreicher ist das geometrische Beispiel selbst, das SOKRATES als Illustration zu seinem Vorhaben in kurzen Worten anführt. Fragt man nämlich die Geometer, ob sich ein bestimmtes Flächenstück in einen gegebenen Kreis einschreiben läßt, dann antworten diese etwa folgendermaßen: ich weiß es nicht, ob es möglich ist, aber ich glaube, die folgende *ὑπόθεσις* könnte zu der Lösung der Frage von Nutzen sein; ist nämlich dieses Flächenstück so beschaffen, daß ...³⁵ dann scheint mir etwas anderes daraus zu folgen (*ἄλλο τι συμβαίνει μοι δοκεῖ*), als wenn es nicht möglich ist, daß dies Flächenstück so beschaffen sei. — Man sieht: „hypothetisch“ ist das Verfahren in dem gegebenen Fall darum, weil der Geometer eigentlich nicht unmittelbar auf die vorgelegte Frage selbst antwortet; statt dessen legt er seiner Untersuchung eine Annahme zugrunde — das ist seine *ὑπόθεσις* —, und dann sagt er, was aus dieser *ὑπόθεσις* folgt; wird dagegen eine andere Annahme derselben Untersuchung zugrundegelegt, ist das fragliche Flächenstück nicht so beschaffen, wie in dem zuerst genannten Fall — ist also die *ὑπόθεσις* eine andere, als die vorhin beschriebene —, dann folgt daraus etwas anderes. Die Untersuchung des Geometers gründet sich also auf eine *ὑπόθεσις*, Annahme oder Voraussetzung.

Vergleicht man nun diese Platon-Stelle mit den vorhin angeführten Worten des PROKLOS³⁶, so hat man zunächst den Eindruck, als ob eigentlich nur die hervorgehobenen Worte, *ἐξ ὑποθέσεως* beide Male dieselben wären, sonst aber auch ein nicht unwesentlicher Unterschied der beiden Stellen zu beobachten wäre. Denn PROKLOS sagt ja, daß die ganze Wissenschaft der Mathematik (=die Geometrie) auf Voraussetzungen beruht, die gar nicht beweisbar sind; nach ihm ist also die Mathematik ganz und gar eine sozusagen „hypothetische Wissenschaft“, während der platonische SOKRATES nur behauptet, daß die Mathematiker ihre Untersuchungen manchmal (*πολλάκις*) „hypothetisch“ führen. Man könnte sich also auf Grund dieser Formulierung beinahe fragen: ob man in der Tat schon zu PLATONs Zeit die „hypothetische Art“ der Mathematik in demselben Sinne verstand, wie darüber später PROKLOS redete? — Gegen einen solchen

³⁴ Vgl. O. BECKER, Die Archai in der griechischen Math., Archiv f. Begriffsgesch. Bd. 4, 210ff.

³⁵ Zur Erklärung der Stelle s. auch P. TANNERY, Mém. Scient. I 39—45, II 400—406 und TH. HEATH, A History of Greek Mathematics, Oxford 1921, I 300ff.

³⁶ PROCLUS (F) 75, 6ff.

Zweifel spricht jedoch die Tatsache, daß PLATON seinen SOKRATES ein anderes Mal folgendes sagen ließ³⁷:

„Ich glaube, du weißt doch wohl, daß die Geometer, die Arithmetiker und die sich mit solchen Sachen beschäftigen, ihren Untersuchungen gewisse Voraussetzungen zu Grunde legen (*ὑποθέμενοι*), wie z.B. die gerade und ungerade Zahl, die geometrischen Figuren, die drei Arten von Winkeln und manches ähnliche; diese Dinge machen sie zu Grundlagen (*ποιησάμενοι ὑποθέσεις αὐτά*), als ob sie sich über diese schon im klaren wären, und sie halten es nicht für nötig³⁸, sich und anderen Rechenschaft über etwas zu geben, was einem jeden doch klar sei. Von diesen Grundlagen aus gehen sie dann vorwärts (*ἐκ τούτων δ' ἀρχόμενοι*) und finden schließlich in Übereinstimmung mit diesen (*διμολογούμενος*) das, was Gegenstand ihrer Untersuchung ist.“

Es geht aus diesem Zitat hervor, daß sich die Mathematiker wohl schon zu PLATONS Zeit über den „hypothetischen“ Charakter ihrer Wissenschaft völlig im klaren sein mußten. Nicht nur manchmal, in einzelnen Fällen (*πολλάκις*) verfahren sie „hypothetisch“, wie man es im Sinne der vorigen Menon-Stelle denken könnte. Nach dem letzteren Zitat legten sie ihren Untersuchungen *immer* *ὑποθέσεις* zugrunde, die sie als von selbst einleuchtend und nicht des Beweises bedürftig betrachteten. — Natürlich müssen sich die letzteren *ὑποθέσεις* irgendwie doch von jenen nur „ad hoc“ gewählten Voraussetzungen unterscheiden, die nach dem Menon-Zitat, irgendeiner speziellen geometrischen Untersuchung zugrunde gelegt werden. Denn es handelt sich ja in dem zuletzt genannten Fall (PLATON, Resp. 510C—D) offenbar schon um solche Voraussetzungen *allgemeiner Art* — gerade Zahl, ungerade Zahl, Winkel, geometrische Figuren usw. usw. — die wohl zu jedweder mathematischer Untersuchung unerlässlich sind. Doch wollen wir diese Unterscheidung der beiden Arten mathematischer *ὑπόθεσις* — eine nur „ad hoc“ gewählte *Annahme* in irgendeinem speziellen Fall, und *Grundlage* der mathematischen Untersuchung überhaupt — einstweilen nicht betonen. Allerdings gingen die Mathematiker — wie SOKRATES an der zuletzt angeführten Platon-Stelle sagt — *nicht* über gewisse *ὑπόθεσις* hinaus. Und uns interessiert vor allem die Frage: wie man wohl historisch zu der Einsicht kam, daß der Mathematik solche nicht bewiesenen „ersten Prinzipien“ zugrunde gelegt werden müssen, und ob eine Betrachtung über die Gebrauchsart des Ausdruckes *ὑπόθεσις* nicht auch dieses Problem einigermaßen beleuchten könnte?

3. Ich glaube, es werden aus der vorher erwähnten Menon-Stelle (86 E 3 ff.) zwei Ausdrücke für unsere nächsten Betrachtungen sehr aufschlußreich. Der eine von diesen ist die Wendung, womit SOKRATES sein „hypothetisches Verfahren“ einleitet: „*erlaube mir*, die Frage auf Grund einer Voraussetzung zu prüfen“ (*συγχώρησον ἐξ ὑποθέσεως αὐτὸν σκοπεῖσθαι*), und der andere Ausdruck ist die Art, wie man auf griechisch die Konsequenzen einer *ὑπόθεσις* umschreibt; der Geometer sagt nämlich nach SOKRATES: wenn die genau angegebene Annahme besteht, „dann scheint mir etwas anderes daraus zu folgen“ (*ἄλλο τι συμβαίνει μοι*

³⁷ PLATON: Resp. VI 510 C—D.

³⁸ „sie halten es nicht für nötig“, oder noch mehr: „sie verlangen, sie fordern es nicht“ — mit dieser Wendung übersetze ich den Ausdruck (*οὐκέ*) *ἀξιοῦσι* in dem angeführten Zitat. Man vgl. zu dieser Übersetzung die späteren Ausführungen im Text über das Wort *ἀξιώμα*.

δοκεῖ), als wenn das Gegenteil der vorigen Annahme besteht. Diese beiden Ausdrücke — „erlaube mir“ und „folgen“ (*συγχώρησον* und *συμβάλειν*) — verraten nämlich einerseits, wie eine solche *ὑπόθεσις* zustande kommt, und andererseits, wie sie gebraucht wird.

SOKRATES kann sein „hypothetisches Verfahren“ nur in dem Fall anwenden, wenn sein Dialogpartner damit einverstanden ist; darum *bittet* er diesen: „erlaube mir“ (*συγχώρησον*). Eine *ὑπόθεσις* wird also eigentlich erst mit der *Zustimmung* des Dialogpartners wirklich zur Grundlage irgendeiner gemeinsam geführten Untersuchung. Darum heißen die *ὑπόθεσις* in der platonischen Dialektik³⁹ manchmal auch *ὅμολογήματα*, „die zugestandenen Dinge“, „worüber die Dialogpartner einig geworden sind“⁴⁰. Das Wort *ὑπόθεσις* scheint also nicht nur ein Terminus der Mathematik, sondern auch derjenige der *Dialektik* zu sein. Diesen Ursprung des Ausdruckes *ὑπόθεσις* aus der Dialektik verrät auch die Art, wie man manchmal das verwandte Verbum selbst in der mathematischen Fachsprache noch benützte: ARCHIMEDES gebrauchte z.B. die Wendung *ὑποκείσθω* — „in seiner Schrift „De corporibus fluitantibus“ — um Prinzipien der Mechanik der Flüssigkeiten einzuführen⁴¹: „es sei zu Grunde gelegt“, als hätte er sagen wollen: „es sei uns erlaubt, uns als einer Grundlage zu bedienen, daß ...“⁴². — Da nun diese Ausdrücke — *ὑπόθεσις* und ihre Synonyme⁴³ — offenbar aus der Dialektik entstammen, wird man sie nicht bloß als mathematische Termini prüfen, sondern gleichzeitig auch untersuchen müssen, wie sie in der Dialektik gebraucht wurden.

Ebenso interessant ist auch der andere Ausdruck, womit die *Konsequenzen* einer *ὑπόθεσις* bezeichnet werden: das Verbum *συμβάλειν*. Es gibt nämlich in PLATONs Wortschatz zahlreiche Synonyme auch für dieses. Die Konsequenzen einer Annahme können auch mit dem Verbum *συμφωνεῖν* umschrieben werden⁴⁴, oder sie heißen: *τὰ ἐπόμενα*⁴⁵, *τὰ ἔξης*⁴⁶ usw. usw. — Prüft man nun diese Wendungen einzeln für sich in ihrem Textzusammenhang bei PLATON, so sieht man, daß sie bald als regelrechte Fachausdrücke der Mathematik⁴⁷, bald als gewöhn-

³⁹ Unter „Dialektik“ verstehe ich in dieser Arbeit immer die *διαλεκτικὴ τέχνη*, d.h. die Kunst des Dialogführers, wie sie uns am besten aus PLATONS Werken bekannt ist.

⁴⁰ Vgl. z.B. PLATON, Theait. 155 A—B.

⁴¹ Opera II. (ed. H.) 318. Die Wendung *ὑποκείσθω* ist bei ARCHIMEDES eine stilistische Variante für *ὑποτιθέμεθα* (vgl. Anm. 28). Über eine *ὑπόθεσις* kann griechisch ohne weiteres auch gesagt werden, daß sie *ὑπόκειται*. Man ersieht dies sowohl aus PLATONs Wortgebrauch, als auch aus dem von EUKLID. (Zu dem letzteren s. z.B. El. IX 34.)

⁴² Ähnlich beginnen bei EUKLID die Postulate mit dem Wort *ἡτίσθω*: „es sei gefordert“; man fordert nämlich in der dialektischen Auseinandersetzung von dem Dialogpartner, daß die betreffende Aussage (das Postulat) der weiteren Untersuchung als eine Annahme zugrunde gelegt werde.

⁴³ Nicht nur das Wort *ὅμολογημα* ist bei PLATON oft synonym mit *ὑπόθεσις*. In demselben Sinne gebraucht er manchmal auch das Wort *ἀρχή*, z.B. Krat. 436 D. Es wäre überhaupt verkehrt, in dieser Untersuchung sich an das bloße Wort klammern zu wollen. Manchmal wird keines von den Wörtern *ὑπόθεσις*, *ὅμολογημα* oder *ἀρχή* benutzt, und doch handelt es sich ohne Zweifel um eine *ὑπόθεσις*, wie z.B. Theait. 163 B, wo das Verbum *ὅμολογησομεν* darauf hindeutet.

⁴⁴ Zum Beispiel „Phaidon“ 100 A.

⁴⁵ „Krat.“ 436 D.

⁴⁶ „Phaidon“ 100 C.

⁴⁷ Zum Beispiel *τὰ συμβαίνοντα* in „Menon“ 87 A.

liche Bezeichnungen der allgemeinen *dialektischen* Terminologie erscheinen. — Man hat also den Eindruck, daß eigentlich nicht nur der Terminus *ὑπόθεσις*, sondern auch ein ganzer Komplex von mit ihm verbundenen Ausdrücken zusammen untersucht werden müßte, denn diese alle treten ja zusammen sowohl in der *Dialektik* als auch in der mathematischen Fachsprache auf⁴⁸.

4. Zunächst scheint die *ὑπόθεσις* in dem dialektischen Verfahren nur einen beinahe *willkürlich* gewählten Ausgangspunkt darzustellen. Die Teilnehmer des Gespräches werden über irgendeine Behauptung einig, die sie dann ihrer weiteren Untersuchung zugrunde legen, und diese wird dann ihre *ὑπόθεσις*⁴⁹. — Nach diesem Schema versuchte man ja auch die Entwicklung der aristotelischen Logik aus der Dialektik zu erklären⁵⁰. Es wäre in der dialektischen Auseinandersetzung die Aufgabe des einen Dialogpartners, den anderen dazu zu bringen, einen von ihm gewählten Satz zuzugeben. Zu diesem Zweck müßte er solche Prämissen finden, die der Partner für richtig hält und daher zugeben wird, und aus denen sich der Endsatz, den der Partner nicht für richtig hält und nicht zugeben will, mit logischer Notwendigkeit ableiten läßt. Eine solche von dem Führer des Dialogs beinahe willkürlich gewählte Prämisse wäre also die *ὑπόθεσις*. — Man liest in der Tat ungefähr in diesem Sinne schon bei PLATON im „Staat“ über eine nur provisorisch gewählte Annahme⁵¹: Wir legen es zugrunde, daß sich die Sache so verhält (*ὑποθέμενοι ὡς τούτον οὕτως ἔχοντος*), und so schreiten wir in der Untersuchung weiter, mit der Bedingung jedoch, daß wir schon im voraus darüber einig geworden sind (*όμολογήσαντες*): sollten wir inzwischen zu einer anderen Ansicht über unseren Ausgangspunkt gelangen (*ἐάν ποτε ἀλλη φανῇ ταῦτα η ταῦτη*), so wird alles nichtig, was wir aus der früheren (falschen) Voraussetzung folgerten (*πάντα ημῖν τὰ ἀπὸ τούτου συμβαίνοντα λελύμενα ἔσεσθαι*).

Nachdem jedoch die *ὑπόθεσις*, die man einer Untersuchung zugrunde legt, auf das engste damit zusammenhängt, was aus ihr gefolgt wird, kann man einen solchen Ausgangspunkt auch nicht völlig „willkürlich“ wählen. Im Gegenteil! Diese Wahl muß mit der größten Umsicht getroffen werden. Man liest darüber in dem Dialog „Kratylos“ das folgende⁵²: Derjenige, der am allerersten

⁴⁸ Natürlich können auch die Bezeichnungen *τὰ ἐπόμενα*, *τὰ ἔξης* etc. als regelrechte *mathematische* Fachausdrücke gelten. Vgl. Z. MARKOVIĆ (Les mathématiques chez Platon et Aristote) in Bulletin International de l'Acad. Yougoslave des Sciences et des Beaux Arts, Classe des Sciences mathématiques et naturelles, XXXII, 1939, 1–21.

⁴⁹ Die Anfangssätze einer dialektischen Auseinandersetzung, — d.h. also die Behauptungen, worüber die Dialogpartner einigen, und die sie dann der weiteren Untersuchung zugrunde legen — werden manchmal in der Tat *völlig willkürlich* gewählt. Man liest z.B. interessante Anweisungen in der aristotelischen „Topik“ (VIII 1, 155b 29ff. und VIII 3, 159a 3ff.) darüber, wie solche Anfangssätze, die der Disputant in einem dialektischen Gespräch zum Ausgangspunkt seiner Beweisführung macht, auszuwählen seien. Diese „Anfangssätze“ heißen zwar an den eben genannten Stellen nicht *ὑπόθεσις*, sondern *ἀξιώματα*, aber man wird aus dieser Untersuchung bald erkennen, daß das Wort *ἀξιώματα* in diesem Zusammenhang nur ein Synonym für *ὑπόθεσις* ist. Vgl. K. v. FRITZ, o. c. 31.

⁵⁰ FRITZ, K. v.: o. c. 20 mit Hinweis auf E. KAPP, „Syllogistik“ in RE IV A 1048 und 1058/59 und „Greek Foundation of Traditional Logic“, Columbia University Press, New York 1942.

⁵¹ PLATON: Resp. IV 437A.

⁵² „Krat“. 436D.

Anfang etwas falsches seiner Untersuchung zugrunde legt (*εἰ γὰρ τὸ πρῶτον σφαλεῖς ὁ τιθέμενος*), ist schon in allem, was darauf folgt, gezwungen, nach seiner früheren Annahme zu gehen, um mit sich selbst im Einklang zu bleiben (*τόλλα ἡδη πρὸς τοῦτ' ἐβιάζετο καὶ αὐτῷ συμφωνεῖν ἥτταγκάζειν*); ebenso, wie es manchmal auch in den geometrischen Zeichnungen passiert, wo der Fehler anfangs oft winzig und unbedeutend ist (*ἄσπερ τῶν διαγραμμάτων ἐνίστε τοῦ πρώτου σμικροῦ καὶ ἀδήλον γενόντος γενομένου*), aber sehr viele falschen Konsequenzen aus ihm folgen. Darum muß sich der Mensch den Anfang jeder Sache sehr sorgfältig überlegen und prüfen (*δεῖ δὴ περὶ τῆς ἀρχῆς παντὸς πράγματος παντὶ ἀνδρὶ τὸν πολὺν λόγον εἰλαν καὶ τὴν πολλὴν σκέψιν*), ob die Grundlage richtig oder falsch gewählt wurde (*εἴτε ὁρθῶς εἴτε μὴ ὑπόκειται*⁵³). Und erst wenn diese Prüfung gründlich vorgenommen wurde (*ἐκείνης δὲ ἔξετασθείσης ἵκανος*), erst dann muß man sehen, ob auch die Konsequenzen dazu stimmen.

Aufschlußreich ist die eben angeführte Platon-Stelle aus den folgenden Gründen. Erstens darum, weil man sieht, wie sehr darin durch SOKRATES die wichtige Rolle der Voraussetzungen in einem Gedankenkomplex hervorgehoben wird. Es ist entscheidend wichtig, was man einer Untersuchung zugrunde legt, denn auch der kleinste Fehler in der Voraussetzung kann ja zu völlig falschen Konsequenzen führen. — Man begegnet demselben Gedanken sehr oft in den platonischen Dialogen. Man erinnert sich z.B. wie einmal SOKRATES in dem Dialog „Phaidon“ auf die Worte des SIMMIAS reagierte. Als nämlich dieser erklärte, daß er zwar gar nichts gegen die vorige Beweisführung des SOKRATES einzuwenden hätte, aber trotzdem auch weiterhin einige Zweifel noch hegte, erwiderte SOKRATES darauf: „Sehr richtig, SIMMIAS, aber nicht nur darin hast du Recht! Auch die ersten Voraussetzungen (*τὰς ὑποθέσεις τὰς πρώτας*) müßt ihr genauer prüfen, ob sie euch glaubwürdig sind (*εἰ πισταὶ ὑμῖν εἰσιν*); und erst wenn ihr diese auseinanderleget, dann werdet ihr auch der übrigen Gedankenführung wohl folgen können⁵⁴.“ — Liest man diese Worte über die „ersten Voraussetzungen“, die *glaubwürdig* oder *wahr* sein müssen, so denkt man — zunächst nur infolge einer Gedankenassoziation — unwillkürlich an die *ποῶται ἀρχαί* der Mathematik. Wir kennen zwar das Problem der antiken Wissenschaft — wie die ersten Prinzipien der Mathematik beschaffen sein müssen — unmittelbar nur aus ARISTOTELES bzw. aus der nacharistotelischen Literatur, und eben deswegen hat man auch die Vermutung aussprechen können: es wäre das Verdienst des ARISTOTELES gewesen, daß er versucht hätte, den Beweis zu erbringen, daß jede Wissenschaft von ersten unbeweisbaren aber nichtsdestoweniger wahren und gesicherten Prinzipien ausgehen muß, und daß er als erster die verschiedenen Eigenschaften festzustellen versucht hätte, die diese Prinzipien haben müßten⁵⁵. Aber es fragt sich dennoch, ob derselbe PLATON, der seinen SOKRATES in dem „Phaidon“ über die „ersten Voraussetzungen“ der dialektischen Beweisführung sprechen ließ, nicht auch das Problem der „ersten Voraussetzungen“ in der Mathematik sehr gut kennen mußte? — Und diese Frage führt uns schon zu dem anderen interessanten Punkt in unserem vorigen „Kratylos“-Zitat zurück.

⁵³ Zu dem Verbūm *ὑπόκειται* vgl. oben Anm. 41.

⁵⁴ „Phaidon“ 107 B.

⁵⁵ FRITZ, K. v.: o. c. 65 und 98.

5. SOKRATES beruft sich nämlich wieder auf ein Beispiel aus der Geometrie: wie in den geometrischen Zeichnungen manchmal winzige und unbedeutende Fehler des Anfangs zu vielen falschen Konsequenzen führen, die mit dem anfänglichen Fehler im Einklang stehen, so geschieht es auch in den Gedankenkonstruktionen, wenn die *ἐποθέσις* falsch gewählt wurde.

Es kann natürlich kein Zufall sein, daß PLATON eben im Zusammenhang mit dem Problem der *ἐποθέσις* so oft auf die Geometrie oder im allgemeinen auf die Mathematik Bezug nahm. Für ihn galt ja die Methode der Mathematik als das höchste Vorbild, das man auch in der dialektischen Beweisführung verwirklichen sollte. Wie oft kommt es ja vor, daß man sich in einem Gespräch bei der Prüfung irgendeiner Frage mit der bloßen mutmaßlichen und gar nicht zwingenden Beweisführung begnügt! So etwas wäre in der Mathematik, wo die Beweise zwingend sein müssen, gar nicht erlaubt⁵⁶. Und das hängt eben damit zusammen, wie in der Mathematik die *ἐποθέσις* gewählt, und wie diese gehandhabt werden. — Darum sind die Voraussetzungen in der platonischen Beweisführung manchmal schon geradezu von mathematischer Art. Man beachte z.B. die drei interessanten *δύολογήματα* in dem Dialog „Theaitetos“⁵⁷: 1. „Ein Ding wird weder größer noch kleiner, weder in seiner Masse noch seiner Zahl nach, solange es *sich* selbst gleich ist“ (*μηδέποτε μηδὲν ἀν μεῖζον μηδὲ ἔλαττον γενέσθαι μήτε ὅγκω μήτε ἀριθμῷ ἔως ἵσον εἴη αὐτῷ ἔαντῷ*). 2. „Wozu nichts hingelegt und wovon nichts weggenommen wird, das kann weder wachsen noch abnehmen, sondern es bleibt immer sich selbst gleich“ (*φ μήτε προστιθοῖτο μήτε ἀραιοῦτο, τοῦτο μήτε αὐξάνεσθαι ποτε μήτε φθίνειν, δεὶ δὲ ἵσον εἶναι*) und 3. „Was früher nicht war, das kann auch später unmöglich — ohne Entstehen und Werden — sein“ (*δ μὴ πρότερον ἦν, νῦντερον ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἄρεν τοῦ γενέσθαι καὶ γίγνεσθαι ἀδύνατον*). — Mit Recht fühlte man sich durch diese Sätze an die mathematischen Axiome erinnert⁵⁸. Und doch heißen bei PLATON diese mit peinlicher Sorgfalt aufgestellten grundlegenden Behauptungen bloß: *δύολογήματα*, „Zugeständnisse, worüber die Teilnehmer des Gespräches einig geworden sind“. Die Benennung spricht eindeutig für den *dialektischen* Ursprung dieser Behauptungen. Aber es sieht ja beinahe so aus, als hätte man hier überall nicht nur mit derselben Terminologie in Dialektik und Mathematik zu tun, sondern als wären diese beiden — Dialektik und Mathematik — auch noch gar nicht völlig voneinander getrennt, als wäre zu dieser Zeit auch die Mathematik noch: nur ein Zweig der Dialektik.

6. Die innere Verwandtschaft, ja die Identität der dialektischen und der mathematischen Methode tritt noch eindeutiger hervor, wenn man genauer ins Auge faßt, wie die *ἐποθέσις* in der platonischen Beweisführung benutzt wird. SOKRATES berichtet einmal über seine Art zu denken⁵⁹ folgendermaßen⁶⁰: Ich lege meiner Untersuchung immer eine Behauptung zugrunde, die ich für besonders stark halte (*ἐποθέμενος ἐκάστοτε λόγον ὃν ἀν κοίνῳ ἐρρωμενέστατον εἶναι*); und worüber ich dann den Eindruck habe, daß es damit im Einklang steht, das heiße ich *wahr*

⁵⁶ Vgl. dazu „Theait.“ 162E.

⁵⁷ „Theait.“ 155A—B.

⁵⁸ MARKOVIĆ, Z.: o. c. 2.

⁵⁹ Nach PLATON ist das Denken ein „Dialog der Seele mit sich selbst“; vgl. „Theait.“ 189E—190.

⁶⁰ „Phaidon“ 100A.

($\delta\ \mu\acute{e}\nu\ \delta\acute{v}\ \mu\acute{o}\ \delta\acute{o}\chi\bar{\eta}\ \tau\acute{o}\acute{v}\ \omega\mu\acute{p}\omega\acute{e}\bar{\nu}\right.$, $\tau\acute{i}\theta\mu\acute{m}\ \acute{w}\acute{s}\ \acute{a}\acute{l}\eta\theta\bar{\eta}\ \acute{o}\acute{n}\tau\acute{a}$); was dagegen damit nicht im Einklang zu stehen scheint, das heiße ich *unwahr* ($\delta\ \delta'\ \delta\acute{v}\ \mu\acute{\eta}\right.$, $\acute{w}\acute{s}\ \acute{o}\acute{n}\ \acute{a}\acute{l}\eta\theta\bar{\eta}$). Wie man sieht, werden in diesem Zitat die Konsequenzen einer $\acute{v}\acute{p}\acute{o}\acute{\theta}\acute{e}\acute{o}\acute{s}\acute{u}\acute{s}$ nicht mit dem Zeitwort *oμpbaίneīv* (= „zusammengehen“⁶¹), sondern mit dem anderen: *oμpawēīv* (= „im Einklang stehen“) umschrieben. Interessant ist dies letzteres Wort deswegen, weil aus PLATONs Wortschatz auch der entsprechende *negative Terminus* wohlbekannt ist. Was mit einer $\acute{v}\acute{p}\acute{o}\acute{\theta}\acute{e}\acute{o}\acute{s}\acute{u}\acute{s}$ nicht im Einklang steht, wird mit dem Zeitwort *δiaμpawēīv* umschrieben⁶², und dies ist, wie man bald sehen wird, wohl die älteste Form unseres eigenen Ausdruckes für den logischen *Widerspruch*. (Der Satz, der mit einem anderen nicht im Einklang steht, der *widerspricht* diesem anderen!)

7. Es ist beinahe gleichgültig, an welchem Beispiel man die Methode von PLATONs dialektischer Beweisführung — und das ist zu gleicher Zeit auch die Methode der *mathematischen Beweisführung* — illustrieren möchte, denn es gibt ungezählte Beispiele dafür fast in jedem platonischen Dialog. Nur aus Bequemlichkeitsgründen ziehe ich ein Beispiel aus dem „Theaitetos“ vor. Erstens nämlich darum, weil in diesem Fall PLATON selber seine Beweisführung als eine nach der Art der Mathematiker bezeichnete. (SOKRATES betonte eben, daß man sich mit der bloß mutmaßlichen Denkweise nicht begnügen dürfte, man sollte eher die Strenge der Mathematiker anstreben — Theait. 162E —, und unmittelbar darauf folgt jene strenge Beweisführung, die ich hier näher untersuchen möchte.) Der andere Grund, der die nähere Prüfung gerade dieser Beweisführung empfiehlt, besteht einerseits darin, daß man zu diesem Fall in der Tat sehr leicht auch ein altes mathematisches Gegenstück heranziehen kann, und andererseits darin, daß die Beweisführung, die näher untersucht werden soll, nicht nur die Kontrolle der Konsequenzen, sondern auch diejenige der $\acute{v}\acute{p}\acute{o}\acute{\theta}\acute{e}\acute{o}\acute{s}\acute{u}\acute{s}$ selbst sehr gut veranschaulicht. Nun lassen sich die wichtigsten Gedanken der fraglichen Beweisführung folgendermaßen zusammenfassen.

Die Frage, die beantwortet werden soll, heißt: ob Wissen und sinnliches Wahrnehmen identisch sind oder nicht (163A: $\acute{e}\acute{l}\ \acute{d}\acute{q}\acute{a}\ \acute{e}\acute{s}\acute{t}\acute{r}\acute{i}\acute{v}\ \acute{e}\acute{p}\acute{u}\acute{o}\acute{t}\acute{h}\acute{m}\acute{u}\acute{j}\ \acute{k}\acute{a}\acute{i}\ \acute{a}\acute{i}\acute{s}\acute{t}\acute{h}\acute{o}\acute{s}\acute{u}\acute{s}\right.$ $\tau\acute{a}\acute{v}\acute{t}\acute{o}\acute{r}\ \acute{h}\ \acute{e}\acute{r}\acute{e}\acute{q}\acute{o}\acute{v}\right)$. Um dies entscheiden zu können, wird zunächst angenommen, daß die beiden — Wissen und sinnliches Wahrnehmen — identisch wären; das wird also die $\acute{v}\acute{p}\acute{o}\acute{\theta}\acute{e}\acute{o}\acute{s}\acute{u}\acute{s}$ der darauffolgenden Untersuchung⁶³. Sind jedoch Wissen und sinnliches Wahrnehmen identisch, dann müssen auch „Sehen“ und „Wissen“ gleich sein, da das Sehen doch eine Art des sinnlichen Wahrnehmens ist. Derjenige, der etwas *sieht*, weiß es auch, während der andere, der etwas *nicht sieht*, dasselbe auch nicht wissen kann. Nun kann aber jemand, der eine Sache sieht — d.h. also derjenige, der nach der eben festgelegten Annahme diese Sache weiß —, die Augen zuschließen, und dann wird er dieselbe Sache nicht mehr sehen; aber er wird dennoch, auch nach dem Zuschließen der Augen, von derselben Sache Kenntnis haben, er wird also diese Sache immer noch wissen. Man müßte also über ihn sagen, daß er dieselbe Sache „weiß“ und gleichzeitig auch „nicht weiß“.

⁶¹ Lateinisch: *con-sequi*. Man denke auch an die Etymologie unseres Wortes „Konsequenz“.

⁶² „Phaidon“ 101 D.

⁶³ Siehe oben Anm. 43.

da er sie doch nicht mehr sieht. — Die Konsequenzen der *ἀπόθεσις* führen also zu einem offensichtlichen *Widerspruch* („er weiß es“ und zu gleicher Zeit „er weiß es nicht“), und das ist das Zeichen dafür, daß die *ἀπόθεσις*, das *δύολόγημα*, woraus man diese Konsequenzen ableitete, falsch war; wie SOKRATES sagt: es scheint, daß etwas Unmögliches daraus folgt, wenn jemand Wissen und sinnliches Wahrnehmen gleichsetzt (164B: *τῶν ἀδύνατων δή τι συμβαίνειν φαίνεται έάν τις ἐπιστήμην καὶ αἰσθησιν ταῦταν φῆ εἶναι*).

Bemerkenswert ist der letzte zitierte Satz dieser platonischen Beweisführung auch schon wegen seiner Terminologie. Das „Unmögliches“, das sich als eine Konsequenz der *ἀπόθεσις* erwies, heißt griechisch: *ἀδύνατον*. Ein jeder, der EUKLID im Original liest, weiß, daß bei ihm gerade dieser Ausdruck als stereotypes Abschlußwort jeder indirekten Beweisführung erscheint: *ὅπερ ἔστιν ἀδύνατον*⁶⁴. In der Tat ist die behandelte platonische Beweisführung auch gar nichts anderes als ein regelrechter indirekter Beweis. SOKRATES möchte eigentlich den Satz beweisen: „Wissen und sinnliches Wahrnehmen sind *nicht* gleich, sie sind verschiedene Dinge.“ Aber er kann für diese Behauptung den zwingenden Beweis⁶⁵ nur nach der Art der Mathematiker führen. Darum wählt er den indirekten Weg und stellt zunächst das Gegenteil der zu beweisenden Behauptung auf: „Wissen und sinnliches Wahrnehmen wären gleich.“ Und dann zeigt er, daß diese andere Behauptung zu einem offensichtlichen Widerspruch führt — wie man griechisch sagt: *διαφανεῖ*, weil unter ihren Konsequenzen ein *ἀδύνατον* auftritt, und darum auch unmöglich wahr sein kann. Das Gegenteil dieser Behauptung — „Wissen und sinnliches Wahrnehmen sind *nicht* gleich“ — muß das richtige treffen. — Genau so bewiesen die Alten Pythagoreer die Inkommensurabilität der Quadratdiagonale zur Seite⁶⁶: wären nämlich Seite und Diagonale des Quadrats kommensurabel, dann müßte dieselbe Zahl gerade und auch ungerade sein. — Natürlich könnte man ähnliche Beweisführungen aus den platonischen Dialogen noch haufenweise anführen⁶⁷.

8. Ich möchte, bevor ich die erwähnte platonische Beweisführung näher untersuche, einem eventuell möglichen Einwand begegnen. Man könnte nämlich nach dem, was bisher entwickelt wurde, bemerken, daß PLATON den dialektisch-mathematischen Terminus *ἀπόθεσις* eigentlich in zwei verschiedenen Bedeutungen benutzte, und daß man diese Unterscheidung auch nicht außer acht lassen dürfte. Einerseits hießen nämlich bei ihm *ἀπόθεσις* jene *Grundlagen* der Wissenschaft, die die Mathematiker für selbstverständlich halten und nicht weiter prüfen⁶⁸, oder auch jene *Anfangssätze* der dialektischen Auseinandersetzung, von denen SOKRATES als von „besonders starken Behauptungen“ auszugehen pflegt⁶⁹;

⁶⁴ In einigen Fällen (z. B. El. I 6, IX 20, 30, 33, 34 u. a. m.) heißt die Abschlußformel *ὅπερ ἄποτον* bzw. *ὅπερ οὐχ ὑπόκειται* (El. IX 34). Das sind natürlich nur stilistische Varianten.

⁶⁵ „Der zwingende Beweis“ als eine Eigenart der mathematischen Denkweise heißt bei PLATON *ἀπόδειξις καὶ ἀνάγκη*, vgl. „Theait“. 162E.

⁶⁶ Eucl. El. X App. 27 (HEIBERG, vol. III, p. 408—410). Vgl. dazu O. BECKER, Quellen u. Studien etc. B 3 (1936) 533—553.

⁶⁷ Zuletzt hat z. B. O. BECKER (Archiv f. Begriffsgesch. 4, 212) auf „Phaidon“ 101 D 4—5, aufmerksam gemacht, wo die Beweisführung derselben Art ist.

⁶⁸ PLATON: Resp. VI 510C—D.

⁶⁹ „Phaidon“ 100.

andererseits heißt aber bei PLATON *ἀπόθεσις* auch irgendeine beliebige Behauptung, deren Gültigkeit in der dialektischen Auseinandersetzung erst geprüft werden soll⁷⁰. In dem eben besprochenen Fall des „Theaitetos“ — zu dem sich auch der altpythagoreische Beweis von der Inkommensurabilität der Quadratdiagonale zur Seite als mathematisches Gegenstück heranziehen ließ — handelt es sich natürlich um die zweite Art von *ἀπόθεσις* und nicht um eine „Grundlage“ der Dialektik oder Mathematik. — Nun will ich gar nicht bestreiten, daß diese Unterscheidung wohl möglich, ja auch berechtigt sein mag. Aber ich muß betonen, daß sie für uns dennoch kaum wesentlich ist. Offenbar unterscheidet sich nämlich die *ἀπόθεσις* als „Grundlage“ von der anderen Art *ἀπόθεσις* bloß darin, daß sie zu *keinem ἀδύνατον* führt — also eine echte *ἀπόθεσις* ist —, während unter den Konsequenzen der anderen Art *ἀπόθεσις* auch ein *ἀδύνατον* auftreten kann, und dann muß eben die *ἀπόθεσις* als falsch verworfen werden. Der Satz von der Unteilbarkeit der Eins wurde z.B. darum zu einer Grundlage der antiken Arithmetik, also zu einer echten *ἀπόθεσις*, weil der gegenteilige Satz — „die Eins wäre teilbar“ — ebenso zu einem Widerspruch führte⁷¹, wie die falsche *ἀπόθεσις*: „die Quadratdiagonale wäre zu der Seite kommensurabel“.

Nun ist die behandelte platonische Beweisführung besonders deswegen lehrreich, weil sie sehr gut veranschaulicht, worauf es eigentlich bei der Verwendung einer *ἀπόθεσις* ankommt. — Es mag aus den bisherigen Erörterungen schon deutlich genug hervorgegangen sein, daß man in jedem Fall, wenn eine *ἀπόθεσις* einmal schon aufgestellt wurde, gleich auch die *Konsequenzen* derselben prüfen will. Es wird überhaupt keine *ἀπόθεσις ohne* ihre Konsequenzen vorgenommen. Dabei kann die Prüfung der Konsequenzen natürlich mit zwei verschiedenen Absichten erfolgen. Entweder ist nämlich die *ἀπόθεσις* eine echte, wie SOKRATES sagt: „eine besonders starke Behauptung“, die gar nicht bezweifelt wird, und in diesem Fall prüft man ihre Konsequenzen, weil man die Schlüsse kennenzulernen will, die sich aus ihr ableiten lassen; oder ist die *ἀπόθεσις* eine fragliche Behauptung, und dann prüft man ihre Konsequenzen, um zu sehen, ob dabei nicht ein *ἀδύνατον* herauskommt, was dann die Unhaltbarkeit der *ἀπόθεσις* zeigen könnte. Es kommt also in beiden Fällen eben auf die Konsequenzen an.

Es fragt sich nun: wie in der platonischen Dialektik die Konsequenzen einer *ἀπόθεσις* zusammengestellt werden? Wie wird die Kette jener Behauptungen aufgebaut, an deren Anfang die *ἀπόθεσις* steht? Was entscheidet darüber, ob sich die einzelnen Glieder der Kette in der Tat aneinander reihen lassen?

9. Überblickt man die Fälle, in denen bei PLATON die Konsequenzen irgend einer *ἀπόθεσις* in dem dialektischen Verfahren untersucht werden, so muß man zu der Überzeugung kommen, daß diese Konsequenzen *immer* unter einem einzigen wichtigen Gesichtspunkt geprüft werden. Es wird nämlich immer kontrolliert, ob die einzelnen Behauptungen, die als Konsequenzen der *ἀπόθεσις* angesehen werden (*τὰ συμβαινότα*⁷²), in der Tat miteinander im Einklang stehen

⁷⁰ Wir vergessen nicht, daß *ἀπόθεσις* bei PLATON auch ein Name für die math. *Definition* war. Daraüber jedoch erst später.

⁷¹ Vgl. dazu Á. SZABÓ, „Die Grundlagen in der frühgriechischen Mathematik“ und „Der älteste Versuch einer definitorisch-axiomatischen Grundlegung der Mathematik“ a. a. O.

⁷² „Menon“ 87A.

(*συμφωνεῖν*). Es gibt jedoch in der platonischen Dialektik dafür — von welcher Art Behauptungen eigentlich im Einklang miteinander stehen — im Grunde sozusagen nur ein *negatives Kriterium*. Das heißt: es wird eigentlich *nie* näher begründet, warum zwei oder mehrere Behauptungen im Einklang miteinander stehen (*διολογεῖν*, *συμφωνεῖν* etc.). Statt dessen wird in der Beweisführung immer nur hervorgehoben, wenn zwei Behauptungen miteinander *nicht* im Einklang stehen (*διαφωνεῖν*). Dieses Nicht-Im-Einklang-Stehen miteinander gilt für PLATON als die sicherste Kontrolle, und gerade dies wird im Zusammenhang mit den Konsequenzen einer *ὑπόθεσις* *immer* geprüft. Genauer gesagt: nur dann wird eine Behauptung als Konsequenz irgendeiner *ὑπόθεσις* angesehen, wenn sie sich mit der *ὑπόθεσις* vereinigen läßt, mit ihr im Einklang steht, ihr *nicht* widerspricht⁷³. Tritt jedoch ein Widerspruch unter den möglichen logischen Konsequenzen einer *ὑπόθεσις* auf, so ist er ein Zeichen dafür, daß die *ὑπόθεσις* falsch war, zu einem *ἀδύνατον* führte⁷⁴.

Aus der Tatsache, daß nach der platonischen Dialektik für die Beurteilung der Konsequenzen einer *ὑπόθεσις* im Grunde nur das negative Kriterium der Widerspruchsfreiheit das entscheidende ist, folgt, daß diese Dialektik ganz und gar auf die Methode der indirekten Beweisführung gebaut ist. Denn die Widerspruchsfreiheit einer Behauptung oder eines ganzen Gedankenkomplexes läßt sich ja als Negativum *nur* auf dem Wege zeigen, daß man den Widerspruch in der gegenteiligen Behauptung, in dem entgegengesetzten Gedankenkomplex nachweist, d.h. also: man beweist das, was zu beweisen gilt, auf indirektem Wege.

Die Anwendung einer *ὑπόθεσις* und die Prüfung ihrer Konsequenzen sind also in der platonischen Dialektik ohne die Methode der indirekten Beweisführung überhaupt nicht denkbar. *Es folgt aus dem Wesen der behandelten Gattung* *ὑπόθεσις* *selbst, daß ihre Anwendung nur auf die indirekte Beweismethode gebaut werden kann.* — Man wird bald sehen, daß diese letzte These von mir — die ich mit allem Nachdruck betonen möchte — eigentlich noch von PLATON formuliert wurde, und auch das ist wohl kein Zufall, daß PLATON selber diesen Gedanken gerade durch PARMENIDES vertreten ließ.

Die Beobachtung, daß die Anwendung einer *ὑπόθεσις* in dem dialektischen Verfahren von der Methode der indirekten Beweisführung gar nicht zu trennen ist, paßt sehr gut zu der Tatsache, daß PLATON selber die behandelte und eben auf die Anwendung einer *ὑπόθεσις* gegründete Beweisführung des „Theaitetos“ als eine nach der Art der Mathematiker bezeichnete. Denn man weiß in der

⁷³ Es sei erwähnt, daß man im Griechischen das Verb *συμβάλλειν* nur für die Bezeichnung solcher Schlüsse gebraucht, die eigentlich nie falsch sind, sondern notwendig aus irgendeiner Prämissen folgen, mag dabei die Prämissen richtig oder falsch sein. So gebraucht das Wort z.B. ARISTOTELES über den Schluß von ZENON („der fliegende Pfeil ruht“) in Phys. Z. 9, 239b 30. (Nach ihm soll also nicht die Schlußweise sondern die Prämissen von ZENON falsch gewesen sein.)

⁷⁴ Es gibt also in der plat. Dialektik — soweit ich sehe — außer der unerlässlichen Forderung der Widerspruchsfreiheit noch keine festen Regeln dafür, von welcher Art Behauptungen sich miteinander verbinden lassen; es gibt noch kein ausgebautes *System der Syllogistik*. Statt der Befolgung irgendwelcher syllogistischen Regeln wird nur die Widerspruchsfreiheit der aneinander gereihten Behauptungen auf dem Wege kontrolliert, daß man jene Behauptungen, die zu einem Widerspruch führen, verwirft, und die gegenteiligen Behauptungen — die zu keinem Widerspruch führen — als wahre Aussagen ansieht. Vgl. dazu auch „Phaidon“ 100ff. besonders 101A.

Tat, wie häufig die Methode der indirekten Beweisführung in der frühgriechischen Mathematik benutzt wurde. B. L. v. d. WAERDEN konnte z. B. nachweisen, daß die ersten 36 Sätze im VII. Buch der euklidischen „Elemente“ aller Wahrscheinlichkeit nach noch aus dem 5. Jahrhundert stammen⁷⁵. Von diesen Sätzen werden aber 15 indirekt bewiesen. Ebenso werden 6 bzw. 8 von den insgesamt 17 Sätzen der Lehre über das Gerade und Ungerade — deren älter Ursprung durch O. BECKER gezeigt wurde⁷⁶ — mit indirekter Beweisführung begründet. Ja, ich konnte zuletzt auch darauf hinweisen, daß selbst der zentrale und grundlegendste Satz der pythagoreischen Arithmetik — derjenige von der Unteilbarkeit der Eins — indirekt bewiesen wurde⁷⁷. Es scheint also, daß man in der Tat die Methode der indirekten Beweisführung mit Recht als etwas für die Mathematik besonders charakteristisches ansehen konnte. Wohl darum hat auch PLATON seinen eben behandelten Beweis als einen nach der Art der Mathematiker bezeichnet.

10. Nun wird man im Sinne der bisher behandelten alten Zeugnisse die folgende interessante Tatsache feststellen müssen. — Wir konnten im Zusammenhang mit dem mathematischen Terminus *ἐπόθεσις* darauf hinweisen, daß nicht nur dieses Wort, sondern auch seine Synonyme, sowie auch die verwandten Ausdrücke, die mit ihm zusammen gebraucht werden, offenbar aus der Dialektik entstammen. Man hat also diese Worte zu allererst wohl nicht in der Mathematik, sondern in der Dialektik benutzt; zu mathematischen Termini wurden diese sozusagen nur als „geliehene Ausdrücke“, die man aus der Dialektik übernahm. Oder wollte man auf die innere Verwandtschaft von Dialektik und Mathematik bestehen, so müßte man die Mathematik — mindestens in dieser Beziehung — als ein Spezialgebiet der Dialektik ansehen. Man könnte also vermuten: die behandelten Ausdrücke der Dialektik wurden wohl nur deswegen als Termini auch in die Mathematik übernommen, weil ja die Mathematik gar nichts anderes, als ein später entwickeltes Sondergebiet der etwas älteren Dialektik wäre.

Es darf jedoch nicht verschwiegen werden, daß dieser letzteren historischen Rekonstruktion etwas zu widersprechen scheint. Für PLATON war ja die mathematische Methode schon ein *Vorbild*; er wollte dieselbe Strenge, die in der Mathematik selbstverständlich ist, auch in die Dialektik einführen. Dies scheint nun doch dafür zu sprechen, als ob die Beeinflussung eher von der Mathematik her vor sich gegangen wäre; als wäre die Mathematik gar nicht der empfangende, sondern eher der gebende Teil, und als wollte sich die Dialektik erst nachträglich nach der schon früheren und entwickelteren Mathematik richten. Für diese letztere Vermutung scheint auch die andere Tatsache zu sprechen, daß nämlich der dialektische Kunstgriff der *ἐπόθεσις*-Anwendung von der Methode der indirekten Beweisführung untrennbar ist. Das indirekte Beweisverfahren scheint doch eine ganz besondere und eben für die mathematische Denkweise charakteristische Eigenart zu sein. — Aber wie ist es dann doch zu erklären — wenn nämlich diese letztere Vermutung zutreffen sollte, und die Mathematik in der Tat die ältere,

⁷⁵ WAERDEN, B. L. v. d.: Math. Ann. 120, 1947—49, 127—153.

⁷⁶ BECKER, O.: Quellen u. Studien etc. B3 (1936) 533—553. Vgl. Á. SZABÓ, „Wie ist die Mathematik zu einer deduktiven Wissenschaft geworden?“ a. a. O. (S. 140 bis 141).

⁷⁷ SZABÓ, Á.: „Der älteste Versuch einer definitorisch-axiomatischen Grundlegung der Mathematik“, a. a. O.

während die Dialektik die jüngere Wissenschaft wäre —, daß die geprüfte Terminologie der Mathematik dennoch aus der Dialektik entstammt?

Wir müssen also die Frage der Priorität — ob die Dialektik oder ob die Mathematik das ältere Anwendungsgebiet war — nochmals ernstlich ins Auge fassen. Bei dieser Prüfung muß zweierlei gefragt werden. Erstens: aus welcher Zeit und in welchem Zusammenhang läßt sich die früheste Anwendung einer solchen Art *ὑπόθεσις* nachweisen, die wir aus der platonischen Dialektik kennenlernten? Und zweitens: wann und unter welchen Umständen wurde die Methode der indirekten Beweisführung ausgebaut?

11. Vor allem möchte ich an einem sozusagen negativen Beispiel illustrieren, wie man bei dem Versuch, die zuletzt vorgelegten Fragen zu beantworten, leicht auf Irrwege geraten kann. Man könnte nämlich auf den Gedanken verfallen: die Tatsache, daß *ὑπόθεσις* schon in der fruhgriechischen Mathematik des 5. Jahrhunderts gebraucht wurden, ließe sich etwa auch mit einer Berufung auf den eudemischen Bericht über die Quadratur der Mönchen durch HIPPOKRATES von Chios wahrscheinlich machen. Denn es heißt ja in der Tat gleich am Anfang dieses Berichtes⁷⁸: HIPPOKRATES habe sich eine *ἀρχή* gemacht und als erstes der für seinen Beweis Nützlichen angenommen, daß usw. usw. (*ἀρχὴν μὲν οὖν ἐποίησατο καὶ πρῶτον ἔθετο τὸν πρὸς αὐτὸν χορηγίαν κτλ.*). Man sieht also, daß der Ausdruck *ὑπόθεσις* selbst zwar unmittelbar nicht gebraucht wird, aber die Worte *ἀρχή*, *πρῶτον* und *ἔθετο* als synonyme bzw. als verwandte Ausdrücke doch die Vermutung nahezulegen scheinen, als handelte es sich hier um eine Art *ὑπόθεσις* in dem Sinne, in dem wir diese Gattung eben kennenlernten. Besonders auffallend sind die Worte *ἀρχή* und *πρῶτον*, die nicht nur an die oben behandelten Platon-Stellen⁷⁹ erinnern, sondern beinahe auch schon den Verdacht erwecken, als handelte es sich hier um die *πρῶται ἀρχαὶ* der Mathematik selbst.

Nun wäre aber eine solche Vermutung völlig verkehrt. Es handelt sich an der angeführten Eudemos-Stelle um gar nichts dergleichen. Das geht ohne jeden Zweifel aus der Fortsetzung des angeführten Zitates hervor, die genau angibt, worin eigentlich die *ἀρχή* oder der Anfang (*πρῶτον*) der Beweisführung des HIPPOKRATES bestand. Er hat sich nämlich die *ἀρχή* gemacht und als erstes der für seinen Beweis Nützlichen angenommen, daß „ähnliche Segmente von Kreisen sich zueinander verhalten, wie die Quadrate ihrer Basen“. — Die *ἀρχή* des HIPPOKRATES war also demnach ein regelrechter geometrischer Satz und gar nicht irgend eine jener Art *ὑπόθεσις*, über die der platonische SOKRATES behauptet, daß sie von den Mathematikern den Untersuchungen zugrunde gelegt werden, und daß sich dieselben Mathematiker auch gar nicht bemühten, sich über diese *ὑπόθεσις* genauer Rechenschaft zu geben⁸⁰. Denn es heißt ja in dem eudemischen Bericht selbst — gleich nach dem vorigen Zitat —, daß HIPPOKRATES seinen Anfangssatz auch *beweisen* konnte (*τοῦτο δὲ ἔδεικνεν ἐξ τοῦ κτλ.*). Er führte nämlich den Satz, daß „ähnliche Segmente von Kreisen sich zueinander verhalten wie die Quadrate

⁷⁸ „Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates“ von F. RUDOLPH, Leipzig 1907; TANNERY, P.: *Mém. Scient.* I 347—349; BECKER, O.: *Quell. u. Studien etc.* B 3 (1936) 417—419.

⁷⁹ „Krat“. 436D und „Phaidon“ 107B.

⁸⁰ PLATON: *Resp.* VI 510C—D.

ihrer Basen“, auf den anderen zurück, daß „Kreise sich zueinander verhalten, wie die Quadrate ihrer Durchmesser⁸¹“

Offenbar benutzt also der eudemische Bericht jene Worte, die oberflächlich betrachtet an das Problem der *ποῶται ἀρχαί* in der Mathematik erinnern, in einem anderen, nur allgemeineren Sinne; er bezeichnet nämlich mit diesen Worten jene *Hilfssätze*, die für HIPPOKRATES in der Beweisführung — wahrscheinlich schon am *Anfang* seines Werkes — unerlässlich waren. Aber über jene *ἐπόθεσις*-Anwendung, die uns in diesem Zusammenhang interessiert, erfahren wir aus diesem Bericht überhaupt nichts. — Dagegen ließe sich die Frage, ob HIPPOKRATES die Methode der indirekten Beweisführung benutzte, nur auf Grund einer sehr eingehenden Behandlung der eudemischen Textüberlieferung entscheiden. Darum muß ich diese letztere Frage in diesem Zusammenhang offenlassen⁸².

Wollte man auf der anderen Seite die Anwendung der *ἐπόθεσις* und diejenige der indirekten Beweisführung in jenen Bruchstücken der frühgriechischen Mathematik nachweisen, die die moderne Forschung in der letzten Zeit wiederzugewinnen vermochte, so könnte man sich leicht in einen merkwürdigen „circulus vitiosus“ verwickeln. Denn es wird zwar heute wohl allgemein angenommen, daß die meisten Sätze in dem VII. Buch der euklidischen „Elemente“ noch aus dem 5. Jahrhundert entstammen, wie es B. L. v. d. WAERDEN nachweisen konnte; und ebenso gilt auch die sog. Lehre vom Geraden und Ungeraden als sehr alt; wahrscheinlich entstand sie noch um die Mitte, oder gar in der ersten Hälfte des 5. Jahrhunderts⁸³. Aber wie weit darf man auf diese, an und für sich sehr wohl begründete Vermutungen noch weitere historische Konstruktionen bauen? Sind z.B. auch die *Beweise* — und besonders die *indirekten Beweise* dieser alten Sätze, so wie man diese heute bei EUKLID liest, ebenso alt wie die Sätze selbst?

Man muß gestehen, daß sich diese letztere Frage — wenn man die betreffenden Beweise nacheinander im einzelnen für sich historisch analysieren wollte — kaum mit Bestimmtheit beantworten ließe. Denn man kann ja in einigen Fällen so gut wie mit voller Sicherheit gerade das Gegenteil zeigen, daß nämlich eben die Beweise von mehreren alten Sätzen *nicht* in ihrer ursprünglichen Form überliefert sind⁸⁴; man hat nämlich in diesen Fällen die Beweise in der späteren Zeit offenbar überarbeitet — zum Teil auch darum, um damit die Sätze selbst in einen neuen Zusammenhang einzufügen zu können. Nun muß aber diese Tatsache zu einer besonderen Vorsicht mahnen. Denn woher sollte man wissen, daß auf der anderen Seite in denjenigen Fällen, in denen sich die Überarbeitung der Beweise von alten Sätzen *nicht* nachweisen läßt, dieselben Beweise schon aus diesem Grund allein ebenso alt sein müßten wie die Sätze selbst?

Man kann in der Tat, was die indirekte Beweismethode selbst betrifft, nur in einem einzigen Fall mit Bestimmtheit behaupten, daß auch *der* Beweis eines bekannten alten Satzes ebenso alt wie der Satz selber ist. Das ist nämlich der

⁸¹ O. BECKER hat zuletzt gezeigt (Archiv f. Begriffsgesch. 4, 218ff.), daß HIPPOKRATES selbst diesen anderen „Anfangssatz“ wahrscheinlich mit sehr einfachen Mitteln tadellos beweisen konnte.

⁸² Zur Beurteilung des HIPPOKRATES in der älteren Forschung vgl. einstweilen das letzte Kapitel der vorliegenden Arbeit.

⁸³ BECKER, O.: Grundlagen der Mathematik 38.

⁸⁴ Vgl. O. BECKER, Quellen und Studien etc. B 3 (1936) 533ff.

Fall des altpythagoreischen Satzes über die Inkommensurabilität der Quadratdiagonale zur Seite (Eucl. El. X App. 27). ARISTOTELES ist unser Zeuge dafür⁸⁵ daß dieser Satz von alters her im wesentlichen mit demselben indirekten Beweis gezeigt wurde, den wir auch bei EUKLID lesen. — Für die übrigen Fälle des indirekten Beweises hat man, soviel ich weiß, keine solchen Zeugnisse.

Und dennoch glaube ich behaupten zu dürfen, daß das verhältnismäßig häufige Auftreten dieser Beweisform in den Sätzen der fröhgriechischen Mathematik kein Zufall ist. Diese Beweise müssen — mindestens im allgemeinen — unverändert auf uns gekommen sein. Die indirekte Methode muß schon in der Mathematik des 5. Jahrhunderts die gewöhnlichste Form des Beweises gewesen sein. — Könnte man diese Behauptung nur mit jenen Platon-Stellen begründen, die ich schon bisher anführte, so bliebe sie nur eine vage Vermutung. Aber man kennt ja genau auch den Ursprung des indirekten Beweises und der *ἐπόθεσις*-Anwendung. Man soll dazu nur die Zeugnisse selbst reden lassen.

12. PLATON ließ in seinem „Parmenides“ den Eleaten ZENON mit eigenen Wörtern erklären, worin eigentlich das Wesentliche seines damals berühmten Werkes bestand⁸⁶. Nach dieser Erklärung wäre die Schrift von ZENON nur eine Hilfeleistung für die Lehre des PARMENIDES gewesen (*βοήθειά τις τῷ Παρμενίδον λόγῳ*). Man hätte nämlich PARMENIDES dadurch verspotten wollen, daß man zeigte: sein Satz über die Eins wäre lächerlich, da er zu sich selbst widersprechenden Behauptungen führte (*ώς εἰ ἐν ἔστι, πολλὰ καὶ γελοῖα συμβαίνει πάσχειν τῷ λόγῳ καὶ ἐναρτίᾳ αὐτῷ*). Gegen diese Versuche hätte sich ZENON gerichtet, als er zeigte, daß die *ἐπόθεσις* der Parmenides-Gegner („*πολλά ἔστιν*“) zu noch lächerlicheren Konsequenzen führt — gesetzt nur, daß man richtig untersuchte (*ώς ἔτι γελουότερα πάσχοι ἀν αὐτῶν ή ὑπόθεσις, εἰ πολλά ἔστιν, η η τοῦ ἐν εἶναι, εἴ τις ἵκανῶς ἐπεξιστεῖ*).

Es geht sowohl aus dieser Stelle als auch aus der parallelen Überlieferung bei SIMPLICIUS⁸⁷ eindeutig hervor, daß nach dieser Auffassung ZENON eigentlich zwei *ὑπόθεσεις* einander entgegenstellte. Diese waren nämlich nach dem Simplicius-Text: *η ὑπόθεσις η λέγοντα „πολλά ἔστιν“* und *η τοῦ ἐν εἶναι*. ZENON prüfte dann, was mit der einen und was mit der anderen *ὑπόθεσις* im Einklang steht, oder wie unser Text besagt: er untersuchte, welcher von diesen Sätzen zu einem Widerspruch führt (*ἐναρτίᾳ αὐτῷ λέγει*), um dann denselben für eine falsche Behauptung erklären zu können. Das heißt also: ZENONS Methode war dieselbe, wie diejenige der platonischen Dialektik. Sehr gut paßt zu dieser Feststellung die Tatsache, daß nach ARISTOTELES ZENON überhaupt der Begründer, oder wie er sagt: der Erfinder der Dialektik war⁸⁸.

Es unterliegt gar keinem Zweifel, daß die eben geprüfte Platon-Stelle als ein völlig zuverlässiges Zeugnis über den historischen ZENON zu gelten hat. In der Tat sind sowohl die *ἐπόθεσις*-Anwendung als auch die von ihr untrennbare indirekte Beweismethode aus den Fragmenten des Eleaten ZENON so sehr bekannt,

⁸⁵ Vgl. dazu O. BECKER ebd. 544 Anm. 11; ARISTOTELES: Anal. pr. I 23; p. 41 a 26. I 44; p. 50a 37.

⁸⁶ PLATON: „Parmenides“ 128.

⁸⁷ SIMPL. Phys. 134, 2 (zu ARISTOT. A 3.187 a 1).

⁸⁸ ARISTOT. Fragm. ed. V. ROSE, Lipsiae 1886 fr. 65.

daß es hier kaum einen Sinn hätte, für diese Behauptung noch einzelne Belege anführen zu wollen. Aus diesen beiden Dingen — *ὑπόθεσις*-Anwendung und indirekter Beweis — bestand ja überhaupt die Dialektik der Eleaten, und auch die platonische Dialektik ist im Grunde gar nichts anderes — wie ich schon öfters betonte⁸⁹ — als nur eine spätere und vielleicht entwickeltere Form der Eleaten-Dialektik.

13. Damit haben wir die zur Zeit bekannte älteste Quelle der *ὑπόθεσις*-Anwendung und der indirekten Beweismethode, die Schule der Eleaten namhaft gemacht. Und in diesem Sinne könnten wir auch schon die früher vorgelegte Frage dahin beantworten, daß das ältere Anwendungsgebiet doch die Dialektik und nicht die Mathematik gewesen sei —, wenn nur nicht gerade in dieser Beziehung eine merkwürdige Vermutung über die Zenonsche Dialektik schon öfters ausgesprochen wäre! Man vermutete nämlich, daß das indirekte Beweisverfahren, die „deductio ad absurdum“, doch durch die ersten griechischen Mathematiker entwickelt worden wäre, und daß ZENON diese Art der Beweisführung nur aus der Mathematik hätte übernehmen können, wobei die ursprüngliche mathematische oder geometrische Eigenart dieser Denkweise immer noch unverändert geblieben wäre⁹⁰.

Man sieht also, daß dieselbe Frage, die uns im Zusammenhang mit der platonischen Dialektik begegnete — ob die Dialektik, oder ob die Mathematik das ältere Anwendungsgebiet wäre — sich mit dem bloßen Hinweis auf die Eleaten keineswegs endgültig beantworten läßt. Ja man könnte sogar folgendermaßen argumentieren: die Vermutung, daß ZENON das indirekte Beweisverfahren aus der Mathematik entnahm, wäre auch schon deswegen wahrscheinlich, weil ja auch PLATON selber betonte, daß er seine *ὑπόθεσις* und die indirekten Beweise nach der Art der Mathematiker aufgebaut hatte. Und warum hätte nicht auch schon ZENON dasselbe machen können? Wir selber betonten ja, daß die Dialektik der Eleaten eine Vorgängerin der platonischen Dialektik war. Waren die Eleaten nicht auch darin Vorgänger von PLATON, daß sie von den Mathematikern lernten? — Man muß also die vorige Vermutung — ZENON hätte die indirekte Beweismethode und die *ὑπόθεσις*-Anwendung aus der Mathematik übernommen — ernster auf die Probe stellen.

Es sei vor allem daran erinnert, daß die griechische Mathematik des zenonschen Zeitalters unmittelbar gar nicht bekannt ist. Alles, was man von der Mathematik dieser Epoche weiß, und was man auf diese Zeit datiert, ist im Grunde nur moderne Rekonstruktion. Diese Tatsache gebietet schon in sich selbst einen gewissen Vorbehalt der geprüften Vermutung gegenüber. Denn es gibt ja gar keinen Beleg dafür, daß indirekte Beweise auch schon in der Mathematik der vorzenonschen Zeit benutzt waren. Vermutet man also dennoch, daß ZENON die Methode der indirekten Beweisführung aus der Mathematik übernommen hätte, so erklärt man das Bekannte mit etwas Unbekanntem.

Dagegen läßt sich die Quelle, aus der ZENON das indirekte Beweisverfahren schöpfte, sehr leicht angeben, wenn man nur die antike Überlieferung nicht völlig beiseite schiebt. ZENON war ja ein Schüler des PARMENIDES und das meiste übernahm er ohne Zweifel von seinem Lehrer. Auch die Methode der indirekten

⁸⁹ Vgl. dazu Á. SZABÓ, „Eleatica“ a. a. O. 98 ff.

⁹⁰ REY, A.: La jeunesse de la science grecque, Paris 1933, 202.

Beweisführung brauchte er nicht von irgendwelchen „älteren Mathematikern“ lernen; sie war ja für ihn schon in dem Lehrgedicht des PARMENIDES sozusagen fertig gegeben. PARMENIDES war es ja, der seine Thesen durch die Widerlegung ihres Gegenteils bewies⁹¹, und überhaupt war das größte und bleibendste Verdienst der parmenideischen Philosophie wohl eben die Entdeckung der indirekten Beweisführung. Ja man kennt auch die näheren Umstände dessen, wie man darauf kommen konnte, diese Methode der Beweisführung zu entdecken. Der Anlaß dazu war wohl durch jene Kritik gegeben, die PARMENIDES an der milesischen Kosmogonie, genauer an der Kosmogonie des ANAXIMENES übte⁹²: ANAXIMENES konnte noch das Weltentstehen aus dem Urstoff durch „Verdünnung“ und „Verdichtung“ erklären⁹³. So vermochte er z.B. das *Wasser* auf die *Luft* zurückzuführen; das *Wasser* wäre also vor seinem Entstehen, d.h. vor der Verdichtung „Luft“ = „Nicht-Wasser“ gewesen. Dagegen konnte PARMENIDES dieselbe Denkweise auf sein *οὐ* nicht mehr anwenden. Wäre auch das *οὐ* vor seinem Entstehen ein *μη οὐ* gewesen? Aber das wäre ja ein Selbstwiderspruch, etwas undenkbares und darum auch unmögliches; das *Seiende* kann immer nur ein seiendes, und nie — auch vor seinem Entstehen nicht — ein *Nicht-Seiendes* sein. (Man könnte also beinahe in dem zenonschen und platonischen Sinne des Wortgebrauches sagen: die *ὑπόθεσις* des Entstehens vom Seienden führt zu einem Widerspruch, zu einem *ἀδύνατον*; sie führt nämlich zu dem Gedanken: das *Seiende* wäre vor seinem Entstehen ein *nichtseiendes* gewesen!) — So war für PARMENIDES in seiner Kritik an der milesischen Kosmogonie die Entdeckung des Begriffes von dem *logischen Widerspruch* und damit auch die Methode der indirekten Beweisführung im Keim gegeben.

14. Die vorangestellten Betrachtungen zeigten, daß sowohl die *ὑπόθεσις*-Anwendung als auch das von ihr untrennbare indirekte Beweisverfahren historisch auf die Schule der Eleaten zurückzuführen sind. Bevor ich nun versuchte, auf Grund dieser Erkenntnis das Entstehen der mathematischen Axiomatik etwas näher zu beleuchten, möchte ich mindestens noch einige charakteristischen Züge dieser Denkweise (der *ὑπόθεσις*-Anwendung) in der platonischen Dialektik hervorheben. (Auch dadurch fällt nämlich manches Licht auf die fruhgriechische Mathematik.)

Kein Zweifel, daß PLATON die eigene Denkweise in den Dialogen meistens durch SOKRATES vertreten ließ. Nun ist es aber wohlbekannt, wie sehr der platonische SOKRATES jeder sinnlichen Wahrnehmung, d.h. also eigentlich jeder Erkenntnis gegenüber, die man sich durch die Vermittlung der Sinnesorgane erwirbt, mißtrauisch war. Wie man im „Phaidon“ liest⁹⁴:

⁹¹ Vgl. dazu Á. SZABÓ, „Zur Geschichte der griech. Dialektik“ (Acta Ant. Acad. Scient. Hung. I Budapest 1953 377—410); „Zur Gesch. der Dialektik des Denkens“ (ebd. II 1954 17—62); „Zum Verständnis der Eleaten“ (ebd. II 1954 243—289); „Eleatica“ a. a. O. und A. GIGON, Der Ursprung der griech. Philosophie, Basel 1945, 251.

⁹² Vgl. dazu K. REINHARDT, Parmenides und die Gesch. der griech. Philosophie, Bonn 1916 48—50, und meinen Aufsatz „Zum Verständnis der Eleaten“ a. a. O.

⁹³ Hippol. Ref. I 7,3 (= DIELS-KRANZ, Fragm. der Vorsokratiker⁸ I 13 Anaximenes A 7).

⁹⁴ „Phaidon“ 79C—D.

„Bedient sich die Seele in der Untersuchung der Mithilfe des Körpers, des Sehens, des Hörens oder auch einer anderen Art des Wahrnehmens — denn darin besteht ja die Mithilfe des Körpers zu der Untersuchung, in der sinnlichen Wahrnehmung —, dann wird die Seele durch den Körper zu solchen Sachen herangezogen, die niemals dieselben bleiben (*οὐδέποτε κατὰ ταῦτα ἔχοντα*), und auch sie verirrt sich, es wird ihr schwindlig, als wäre sie betrunken, da sie sich ja an solche Sachen klammert. — Führt dagegen die Seele die Untersuchung auf sich selbst gestellt durch, so nähert sie sich dem, was rein, immerwährend (*ἀεὶ ὄν*), unsterblich und immer dasselbe ist (*ώσαντας ἔχον*) usw.“

Es werden also in diesem Zitat zweierlei Arten des Erkennens einander entgegengestellt: das Erkennen unter Mithilfe des sinnlichen Wahrnehmens, und die Erkenntnis ohne eine Inanspruchnahme der sinnlichen Wahrnehmung. — Selbstverständlich ist bei PLATON auch diese Unterscheidung der beiden Arten des Erkennens — und dabei die Bevorzugung der rein geistigen Erkenntnis — nur eine Erbschaft der Eleaten-Philosophie⁹⁵. Es war ja PARMENIDES, der seine Jünger so ausdrücklich ermahnte: „Laß dich nicht durch die vielerfahrene Gewohnheit auf diesen Weg zwingen: deinen Blick den Ziellosen, dein Gehör das brausende und deine Zunge walten zu lassen! Nein, mit dem Verstande bringe die vielumstrittene Prüfung, die ich dir riet, zur Entscheidung⁹⁶!“

Untrennbar ist also jene Art der *ὑπόθεσις*-Anwendung, die wir im vorigen kennengelernten, von dem völligen Ablehnen jeder sinnlichen Wahrnehmung. So war es nicht nur in der Philosophie der Eleaten — ZENON konnte z. B. seine sog. Trugschlüsse nur unter der Bedingung verfechten, daß er dabei die Sinneswahrnehmungen für *falsch* erklärte —, sondern auch in derjenigen von PLATON. Denn jenes Kriterium der Widerspruchsfreiheit, das in der *ὑπόθεσις*-Anwendung das Entscheidende ist, läßt sich ja nur im reinen Denken zur Geltung bringen. Die Gegenstände der sinnlichen Erfahrung verwandeln sich immerfort, sie gehen in ihr Gegenteil hinüber — darum sind diese *widerspruchsvoll* —, nur die bloß gedachten Dinge, wie z. B. die Begriffe „das Gleiche“ (*τὸ ίσον*), „das Schöne“ (*τὸ καλόν*) etc.⁹⁷ bleiben immer unverändert und gehen nie in ihr Gegenteil hinüber. Die *ὑπόθεσις*-Anwendung und das Ablehnen der sinnlichen Wahrnehmung bilden also seit der Lehre der Eleaten eine unzertrennliche, organische Einheit. (Es sei hier nur nebenbei erwähnt: ich konnte in der letzten Zeit schon öfters darauf hinweisen, daß auch in der fruhgriechischen Mathematik eine auffallende antiempirische und anschauungswidrige Tendenz zusammen mit den ersten Anwendungen der indirekten Beweisführung auftrat⁹⁸!)

⁹⁵ Es wäre müßig, in diesem Zusammenhang fragen zu wollen: ob denn eine Erkenntnis ohne die Inanspruchnahme der sinnlichen Wahrnehmung überhaupt möglich ist? — Vgl. dazu meine Arbeit: „Zur Gesch. der Dialektik des Denkens“ a. a. O.

⁹⁶ DIELS-KRANZ: Vorsokratiker⁸ I 28 Parmenides B 7. — Man vgl. übrigens zu den angeführten Worten des SOKRATES über die sinnliche Wahrnehmung das Fragment des Eleaten MELISSOS: DIELS-KRANZ I 30 B 8.

⁹⁷ Man vgl. dazu „Phaidon“ 78D: *αὐτὸν τὸ ίσον, αὐτὸν τὸ καλόν, αὐτὸν ἔκαστον δὲ έστιν, τὸ δὲ, μή ποτε μεταβολὴν καὶ ἡγνωστὸν ἐνδέχεται . . . δεὶ αὐτῶν ἔκαστον δὲ έστι . . . ώσαντας κατὰ ταῦτα ἔχει καὶ οὐδέποτε οὐδαμῆς οὐδαμᾶς ἀλλοίων οὐδεμίαν ἐνδέχεται.*

⁹⁸ SZABÓ, Á.: „Deiknymi, als math. Terminus für *beweisen*“, a. a. O. und „Die Grundlagen in der fruhgriech. Mathematik“ a. a. O.

Nun gibt es aber ein so gut wie unwiderlegbares, von PLATON selbst geliefertes Zeugnis dafür, daß in seiner Philosophie sowohl das Ablehnen der sinnlichen Wahrnehmung, als auch die *ἀπόθεσις*-Anwendung und die Methode der indirekten Beweisführung eine Erbschaft der Eleaten waren. Er ließ nämlich in dem Dialog „Parmenides“ durch den Lehrmeister der Eleaten selber seinem SOKRATES das Lob erteilen:

„Ich war damit sehr zufrieden, SOKRATES, als ich aus deinen Worten entnahm, daß du nicht liebst, die Untersuchung im Kreise der sichtbaren Dinge zu verirren, sondern du richtetest deine Aufmerksamkeit auf diejenigen, die nur mit dem Verstande zu erfassen sind⁹⁹.“

Diese Worte stehen im besten Einklang sowohl mit der eben zitierten Mahnung des historischen PARMENIDES als auch mit der bekannten Methode der platonischen Dialektik. Dabei kann das Lob des PARMENIDES wohl auch als ein Zeugnis dafür gelten, daß auch PLATON selber keineswegs verhehlen wollte: seine dialektische Methode ist dieselbe, wie diejenige der Eleaten.

Nun ist jedoch die eben genannte Stelle im Dialog „Parmenides“ auch noch von einem anderen Gesichtspunkt aus sehr lehrreich. Denn es handelt sich ja in dem vollständigen Textzusammenhang, von dem ich das letzte Zitat heraustriff, eben um die *ἀπόθεσις*-Anwendung selbst. Und da erteilt PARMENIDES den folgenden interessanten Rat: man soll in jedem gegebenen Fall nicht nur irgendeine bestimmte *ἀπόθεσις* und ihre Konsequenzen sich überlegen, sondern gleich auch die gegenteilige *ἀπόθεσις* aufstellen und auch ihre Konsequenzen genau prüfen¹⁰⁰. Es wird auch das Beispiel von ZENON genannt, der in den Untersuchungen sowohl die Konsequenzen seiner eigenen *ἀπόθεσις*, als auch diejenigen der gegenteiligen *ἀπόθεσις* immer sorgfältig prüfte.

Es unterliegt gar keinem Zweifel, was der Sinn dieser doppelten *ἀπόθεσις*-Anwendung sei. Wird jede sinnliche Wahrnehmung, d.h. also eigentlich auch jede konkrete Erfahrung prinzipiell als unzuverlässig oder falsch abgelehnt, so kann man sich von der Richtigkeit oder Unrichtigkeit einer Behauptung gar nicht dadurch überzeugen, daß man die betreffende Behauptung an den konkreten Dingen der Sinneswelt kontrolliert. Statt dessen gibt es nur eine einzige Möglichkeit, sich von der Gültigkeit oder Ungültigkeit einer Behauptung zu vergewissern: man stellt nämlich auch die gegenteilige Behauptung auf, und man prüft an den Konsequenzen beider Behauptungen, welche von ihnen zu einem Widerspruch führt; diejenige muß dann verworfen, und die andere — d.h. also die Behauptung, die zu keinem Widerspruch führte — muß als wahr hingestellt werden. Aus einer solchen doppelten *ἀπόθεσις*-Anwendung besteht eigentlich jeder vollständig durchgeföhrter indirekter Beweis, und gerade auf diesen ist ja die ganze platonische Dialektik gebaut.

Kein Zweifel, daß jene doppelte *ἀπόθεσις*-Anwendung, die der platonische PARMENIDES seinem Gesprächspartner so nachdrücklich empfiehlt, auch schon in der Arithmetik des 5. Jahrhunderts oft benutzt wurde. Man konnte z.B.

⁹⁹ PLATON: „Parmenides“ 135 E.

¹⁰⁰ PLATON: „Parm.“ 135 E—136: *χρή, δὲ καὶ τόδε ἔτι πρὸς τούτῳ ποιεῖν, μὴ μόνον εἰ ἔστιν ἔχαστον ὑποτιθέμενον σκοπεῖν τὰ συμβαίνοντα ἐκ τῆς ὑποθέσεως, ἀλλὰ καὶ εἰ μὴ ἔστι τὸ αὐτὸ τοῦτο ὑποτίθεσθαι, εἰ βούλει μᾶλλον γνωμασθῆναι.*

nur mit einer solchen doppelten *ἐπόθεσις*-Anwendung entscheiden, welcher von den beiden Sätzen gültig sein sollte: ob die Eins teilbar, oder ob sie unteilbar wäre¹⁰¹?

15. Nachdem nun geklärt wurde, daß die *ἐπόθεσις*-Anwendung und die Methode der indirekten Beweisführung aus der Philosophie der Eleaten entstammen, kann man auch die Prioritätsfrage — ob die Dialektik oder ob die Mathematik die ältere Wissenschaft wäre — eindeutig beantworten. Selbstverständlich war das ursprüngliche Anwendungsgebiet *nicht* die Mathematik, sondern die Dialektik, wie man dies schon aus der bloßen Tatsache hätte schließen können, daß die ganze geprüfte Terminologie der Mathematik *dialektischen Ursprungs* ist. Demnach kann also in der Tat die frühgriechische Mathematik in dieser Beziehung als ein Spezialgebiet der Dialektik gelten.

Dabei ist aber die Tatsache, daß PLATON dennoch gerade die mathematische Methode als höchstes und nachahmenswertes Vorbild hinstellte, auch unter historischem Gesichtspunkt sehr bedeutend. Daraus erahnt man nämlich, wie sehr zu PLATONS Zeit die ursprünglich rein dialektische Methode der *ἐπόθεσις*-Anwendung und des indirekten Beweisverfahrens schon völlig in der Mathematik eingebürgert sein mußte. Es scheint in der Tat, daß in der Zwischenzeit — von PARMENIDES-ZENON bis PLATON — die Lehre der Eleaten über Widerspruch und Widerspruchsfreiheit eine zwiefache Entwicklung durchmachte: auf der einen Seite entartete sie nämlich in die Sophistik¹⁰², auf der anderen Seite erblühte sie in jener Mathematik des 5. Jahrhunderts, deren unmittelbarer Fortsetzung man in den Werken von PLATONS Zeitgenossen, in denjenigen von THEAITETOS und EUDOXOS begegnet. Natürlich war es für PLATON gar keine Frage: zu welcher Entwicklungslinie er sich bekennen soll.

Wichtig ist aber die Tatsache, daß PLATON sich in der Anwendung der *ἐπόθεσις* auf das Vorbild der Mathematik berief, auch noch unter einem anderen Gesichtspunkt. Man kann nämlich daraus nicht nur die bloße Tatsache erschließen, daß in der zeitgenössischen Mathematik die *ἐπόθεσις* irgendwie eine große Rolle spielten. Man kann auch noch darüber hinausgehend mit einiger Wahrscheinlichkeit vermuten: welcher Art *ἐπόθεσις* in der vorplatonischen Mathematik überhaupt üblich waren.

Es interessierte uns vor allem die Frage: ob die alten mathematischen *ἐπόθεσις* nur „ad hoc“ gewählte Annahmen waren, wie man einer solchen „ad hoc“ gewählten geometrischen *ἐπόθεσις* in dem Dialog „Menon“ begegnet (86E3), oder ob man wohl schon in der vorplatonischen Zeit versuchte, auch die *allgemeinen Grundlagen* der Mathematik irgendwie so zusammenzustellen, wie dies später EUKLID tat?

Man muß in der Beantwortung dieser Frage vor allem die folgenden Tatsachen berücksichtigen:

1. Nach dem Bericht des PROKLOS war HIPPOKRATES von Chios ein Mathematiker des 5. Jahrhunderts, der erste, der „Elemente“ zusammenstellte¹⁰³. Nun kann man sich jedoch ein solches Elementarbuch ohne das Vorausschicken irgendwelcher Prinzipien schwerlich denken.

¹⁰¹ SZABÓ, Á.: „Die Grundlagen in der frühgriech. Mathematik“ a. a. O. 20ff.

¹⁰² Vgl. Á. SZABÓ, „Zur Gesch. d. griech. Dialektik“ a. a. O. 396ff.

¹⁰³ PROCLUS (F) 66, 7f.

2. Es ist auch bekannt, daß manche Definitionen und Termini der griechischen Geometrie, die bei EUKLID bloß genannt werden, wie z. B. die Definitionen der geraden Linie und der ebenen Fläche, oder die Ausdrücke: ἐπερόμηκες, δύομβος, δύομβοιδές, τρίστλενος, πολύπλενος etc. für das euklidische Werk selbst überflüssig sind¹⁰⁴; diese Definitionen und Termini sind voreuklidischen Ursprungs, d.h. also sie entstammen allerdings aus irgendeiner voreuklidischen Zusammenstellung von mathematischen Prinzipien.

3. Auch PLATON selber erwähnt einige solche *ἐποθέσεις* der Mathematiker, die man unter den späteren euklidischen Definitionen wiederfindet, wie z. B. die gerade Zahl, die ungerade Zahl, die drei Arten von Winkeln und die geometrischen Figuren¹⁰⁵. Ja, die Bemerkung von PLATON, daß sich dieselben Mathematiker auch gar nicht bemühten, sich oder anderen über solche *ἐποθέσεις* genauer Rechenschaft zu geben, scheint beinahe ein Beweis auch dafür zu sein, daß es wohl schon in der vorplatonischen Zeit ebenso üblich war, diese Art *ἐποθέσεις* in einer Sondergruppe den mathematischen Erörterungen vorauszuschicken, wie dies später AUTOLYKOS von Pitane, EUKLID und alle bekannten Mathematiker taten. Denn man konnte ja äußerlich eben nur durch dieses Vorausschicken in einer Sondergruppe kenntlich machen, daß diese Sätze *nicht* bewiesen werden, während man sonst alles übrige beweisen will.

Es unterliegt also gar keinem Zweifel, daß man schon in der vorplatonischen Zeit bestrebt war, gewisse allgemeine Grundlagen der Mathematik zusammenzustellen. Wie SOKRATES seiner Untersuchung immer eine Behauptung zugrunde zu legen pflegte, die er für „besonders stark“ hielt („Phaidon“ 200A), so machte man es jedesmal auch in der Mathematik, nachdem nun die mathematische Methode doch dieselbe war, wie die dialektische Denkweise des platonischen SOKRATES. Und da nun in der mathematischen Untersuchung diese „besonders starken (widerspruchsfreien) Behauptungen“ meistens von Fall zu Fall dieselben Sätze waren, konnte auch der Gedanke als sehr naheliegend erscheinen, diese besonders starken Behauptungen der Mathematik als Grundlagen am Anfang des Werkes in einer Sondergruppe zusammenzustellen. — Eben auf solche Überlegungen gestützt konnte ich zuletzt versuchen, nachzuweisen, daß ein bedeutender Teil der arithmetischen Definitionen am Anfang des VII. Buches der euklidischen „Elemente“ noch aus dem 5. Jahrhundert entstammt¹⁰⁶. Ich stellte dabei auch die Vermutung auf, daß wohl eben die *Definitionen* die „ersten“ solchen mathematischen Prinzipien waren, deren Sonderstellung man am frühesten erkennen mußte. Nun will ich diesmal die Argumente, die ich für diese Vermutung namhaft machen konnte, nicht wiederholen; ich will nur daran erinnern, daß nach unseren vorigen Betrachtungen der Ausdruck *ἐποθέσεις* auch als ein Name für mathematische *Definitionen* gelten konnte. Diese spezielle Bedeutung desselben Wortes innerhalb der mathematischen Terminologie („Definitionen“) — neben seiner allgemeinen Bedeutung („Annahme“ oder „Grundlage“) —

¹⁰⁴ TANNERY, P.: Mém. Scient. II 48—49; vgl. Á. SZABÓ, „Die Grundlagen in der frühgriech. Mathematik“ a. a. O. 15.

¹⁰⁵ PLATON: Resp. VI 510C—D.

¹⁰⁶ „Der älteste Versuch einer definitorisch-axiomatischen Grundlegung der Mathematik“ a. a. O.

spricht doch dafür, daß man unter *Grundlagen* der Mathematik in einer Zeit vornehmlich Definitionen verstehen mußte.

In der Tat gelten auch in der dialektischen Auseinandersetzung eben die Definitionen als die allerersten *ὑποθέσεις*, über die sich die Gesprächspartner einigen müssen. Man muß nämlich vor allem festlegen, daß der Gegenstand, über den man redet, etwas ist, und daß er sich auf alle Fälle von dem unterscheidet, was *nicht* dieser Gegenstand ist; er kann also nicht zu gleicher Zeit er selber und auch das Gegenteil von sich selbst sein. Wie es z. B. im platonischen „Euthyphron“ heißt: „dasselbe ist das Heilige (*τὸ ὅμοιον*), in jedem Fall nur sich selbst gleich, und ebenso auch das Unheilige (*τὸ ἀρότον*) immer das Gegenteil des Heiligen¹⁰⁷“. Das griechische Wort für „definieren“ (*ὁρίζεσθαι*) heißt eigentlich *abgrenzen*. Es wird nämlich in der Definition der Begriff des Gegenstandes, sein „*Eidos*“, von dem abgegrenzt, was *nicht* dieser Gegenstand ist, denn man kann ja eben nur durch diese Abgrenzung die Widerspruchsfreiheit des Begriffes sichern. Eine solche Abgrenzung des Gegenstandes von seinem Gegenteil, von dem, was *nicht* dieser Gegenstand ist — d.h. also die älteste *Definition* in dem ursprünglichen Sinne des Wortes — wurde zum allerersten Male wohl eben durch PARMENIDES versucht, als er sein *ὄν* („das Seiende“) von dem *μή ὄν* („das Nicht-Seiende“) scharf trennte. Die Vorbedingung der Dialektik der Eleaten ist gerade dieses Abgrenzen, das Definieren. Und ebenso heißt es bei PLATON: es ist ohne das Festlegen der Definitionen die dialektische Auseinandersetzung auch gar nicht möglich: „Wenn jemand nicht zugibt, daß die Dinge ihre ‚*Eide*‘ haben, ..., und wenn man das ‚*Eidos*‘ jedes einzelnen Dinges nicht abgrenzt (definiert), so kann man seine Vernunft auch nicht auf irgendeine Sache hinlenken, denn man läßt in diesem Fall auch nicht zu, daß der Begriff eines jeden Dinges immer unverändert derselbe bleibe, und damit hebt man ja auch die Möglichkeit einer dialektischen Auseinandersetzung völlig auf¹⁰⁸.“ Mit anderen Worten heißt dies so viel: legt man im voraus durch die Definition nicht fest, daß der Gegenstand, über den man redet, der Begriff, immer derselbe ist, also nie in sein Gegenteil hinübergreifen kann, so wird dieser Gegenstand widerspruchsvoll („er selber“ und auch „nicht er selber“), und damit wird in der Tat auch die Möglichkeit jener dialektrischen Auseinandersetzung aufgehoben, die nur auf die Widerspruchsfreiheit gebaut werden kann.

Nachdem nun die frühgriechische Mathematik als ein Spezialgebiet der Dialektik galt, mußte man selbstverständlich auch in dieser mit der Festlegung der Definitionen, der allerersten *ὑποθέσεις* beginnen. Diese mathematischen Definitionen schufen in der Tat auch völlig neue *Grundlagen* für jene Wissenschaft, die theoretische Mathematik — besonders die Arithmetik —, die eben die Widerspruchsfreiheit in einer bis dahin gar nicht gehahnten Weise zu verwirklichen vermochte. So wurde z. B. der *Satz* von der Unteilbarkeit der Eins, d.h. also diese *Definition* in dem ursprünglichen Sinne des Wortes — die *Abgrenzung der Eins von dem, was Nicht-Eins ist* — zur Grundlage, *ὑπόθεσις* der ganzen pythagoreischen Arithmetik¹⁰⁹.

¹⁰⁷ „Euthyphron“ 5D; vgl. „Phaidon“ 102E.

¹⁰⁸ „Parm.“ 135B—C: εἰ γέ τις δή ... αὐδὴ μὴ ἐάσει εἰδη τῶν ὄντων εἶναι ... μηδὲ τι οὐκεῖται εἰδος ἐνὸς ἔκαστον, οὐδὲ ὅποι τρέψει τὴν διάνοιαν ἔξει, μὴ ἐῶν λδέαν τὰν ὄντων ἔκαστον τὴν αὐτὴν ἀεὶ εἶναι, καὶ οὕτως τὴν τοῦ διαλέγεσθαι δύναμιν παντάπασι διαφθερεῖ.

¹⁰⁹ Vgl. dazu meine Arbeit: „Der älteste Versuch einer definitorisch-axiomatischen Grundlegung der Mathematik“ a. a. O.

III. Die *αἰτήματα* und *ἀξιώματα*

Eine der wichtigsten Aufgaben der vorliegenden Untersuchung besteht darin, genau festzustellen: was eigentlich der Sinn jener Dreiteilung der mathematischen Prinzipien ist, der man am Anfang der euklidischen „Elemente“ begegnet, und wie man historisch zu dieser dreifachen Unterscheidung gekommen sein mag? Diese Frage konnte im bisherigen erst angenähert werden. Man weiß schon einiges darüber, wie man wohl im allgemeinen die Grundlagen der Mathematik, die *ἐποθέσεις* oder *ἀρχαί* erkannte. Auch das Problem der ersten mathematischen, besonders der arithmetischen Definitionen (*ὅροι* oder einfach: *ἐποθέσεις*) konnte schon einigermaßen beleuchtet werden. Aber die weitaus schwierigere Frage, das Problem der euklidischen *αἰτήματα* und *κοιναὶ ἔργα* wurde bisher kaum noch berührt. Man weiß einstweilen nur, daß statt der Bezeichnung *κοιναὶ ἔργα* der ursprüngliche euklidische Name wohl *ἀξιώματα* war. Erst später, unter stoischem Einfluß fing man an, die euklidischen *ἀξιώματα* nachträglich als *κοιναὶ ἔργα* zu bezeichnen¹¹⁰. — Nun will ich im folgenden das Problem der euklidischen *αἰτήματα* und *ἀξιώματα* in Angriff nehmen.

Zunächst müssen wir die beiden Namen — *αἰτήματα* und *ἀξιώματα* — genauer verstehen, ohne daß wir dabei gleich auch jene grundlegenden Sätze näher berücksichtigen wollten, die bei EUKLID mit diesen Namen bezeichnet werden. Wir fragen also: was heißen die beiden Ausdrücke — bloß in sich selbst betrachtet?

1. Der Name *αἰτημά*, „das Fordernde, die Forderung“, oder lateinisch: *postulatum* scheint gar nicht problematisch zu sein, da ja das griechische Verbum, von dem er abgeleitet ist, *αἰτέω*, „bitte, verlangen, fordern“ heißt. Interessant ist dieser Ausdruck nur darum, weil er uns daran erinnert, eine wie große Rolle in der dialektischen Auseinandersetzung ein solches *Bitten* spielte. Man sah schon im vorigen Kapitel, an dem „Menon“-Beispiel (Men. 86E3), daß SOKRATES anläßlich seines „hypothetischen Verfahrens“ den Gesprächspartner *bat*: „erlaube mir (*συγχώσον*) die Frage auf Grund einer Annahme zu prüfen“. Solchen Ausdrücken des *Bittens*, *Verlangens*, *Forderns* oder auch des *Nehmens* (*λαμβάνειν*) von der einen Seite her, und den Ausdrücken des *Gebens*, *Zugebens* oder auch des *Nicht-Zugebens* von der anderen Seite her begegnet man in den dialektischen Auseinandersetzungen der Alten auf Schritt und Tritt¹¹¹.

Das *αἰτημα* scheint also ein solcher Anfangssatz in der dialektischen Auseinandersetzung zu sein, dessen Zugeben durch den einen Gesprächsteilnehmer von seinem Partner *gefördert* wird. — Geht nun diese *Forderung* in Erfüllung, gibt also der Partner die Richtigkeit der vorgeschlagenen Behauptung zu, dann heißt es natürlich so viel, daß sich die beiden Gesprächspartner über den Ausgangspunkt der Auseinandersetzung einigten, und in diesem Fall könnte der so gewählte Satz — wie man es schon aus dem vorigen Kapitel weiß — auch ein *ὅδολόγημα* oder eine *ἐπόθεσις* heißen. Wird dagegen die Zustimmung des Partners zu dem vorgeschlagenen Satz als Ausgangspunkt der Auseinandersetzung

¹¹⁰ Siehe das erste Kap. der vorliegenden Untersuchung.

¹¹¹ Man vgl. dazu z. B. „Phaidon“ 100B 5: *ἐποθέμενος εἶναι τι καλὸν αὐτῷ καθ' αὐτό . . . ἂν εἴ μοι δίδως τε καὶ συγχώρεις εἶναι ταῦτα . . . Άλλὰ μήν, ἐφη δὲ Κέρβης, ως διδόντος σοι οὐκ ἀν φάνοις περαίνων. Oder auch ARISTOT. Phys. Z. 9.239b 30 (über ZENONS Argumente): *ὅτι ή οἰστός φερομένη ἐστηκεν, αυμβαλνε δὲ παρὰ τὸ λαμβάνειν τὸν, χρόνον συγκεῖσθαι ἐπ τῶν νῦν μὴ διδομένον γὰρ τούτον, οὐκ ἐσται διαλογισμός.**

in der Schwebe gelassen, so heißt derselbe Satz kein *δμολόγημα*, sondern bloß ein *αἴτημα*.

Es scheint, daß man in der Terminologie der griechischen Dialektik den Terminus *αἴτημα* in der Tat in diesem Sinne von der *ὑπόθεσις* oder dem *δμολόγημα* unterscheiden sollte. PROKLOS schreibt z.B. in offensichtlicher Anlehnung an eine Aristoteles-Stelle (Anal. post. I 10, 76b 27–34) folgendes darüber: „Wenn aber die Behauptung — die man nämlich einer Untersuchung zugrunde legen will — noch unbekannt ist, und die Annahme gleichwohl erfolgt, obwohl der Lernende sie nicht zugibt, dann — sagt er (=ARISTOTELES) — sprechen wir von einem Postulat (*αἴτημα*), wie z.B. bei dem Satz, daß alle rechten Winkel einander gleich sind¹¹².“ Mit Recht bemerkte man im Zusammenhang mit dieser — zum Teil allerdings fälschlichen — Berufung auf ARISTOTELES, daß ARISTOTELES eigentlich gar nicht über das Problem des *mathematischen Postulates* sprach¹¹³. Es wäre also nur ein Irrtum, wenn PROKLOS sein Aristoteles-Zitat mit dem Beispiel des vierten euklidischen Postulates ergänzte. Denn ARISTOTELES berücksichtigte ja gar nicht das Problem der mathematischen Postulate. Das *αἴτημα*, wie er es definieren wollte, wäre nur ein Terminus der Dialektik. Aber diese Einschränkung ist für uns augenblicklich völlig belanglos. Denn auch wir wollen ja zunächst nur im allgemeinen die Bedeutung des Namens *αἴτημα* verstehen, ohne Rücksicht darauf, was für Sätze in der euklidischen Geometrie mit diesem Terminus bezeichnet werden.

Nun scheint der mathematische Terminus *αἴτημα* ebenso aus der Dialektik zu entstammen, wie auch sein vorhin behandeltes Synonym, der Ausdruck *ὑπόθεσις* selber. Auch was die Bedeutung von diesem, ursprünglich nur rein dialektischen Terminus betrifft, scheint der Unterschied — im Vergleich zu der Bedeutung des anderen Terminus, *ὑπόθεσις* oder *δμολόγημα* — kein wesentlicher zu sein, abgesehen natürlich davon, daß im Falle des *αἴτημα* die Zustimmung des Dialogpartners, wie es schon hervorgehoben wurde, in der Schwebe gelassen wird.

Auch in der mathematischen Terminologie ist das Wort *αἴτημα* — wenn man EUKLID einstweilen völlig außer acht läßt! — bloß ein Synonym für den Ausdruck *ὑπόθεσις*. Wir haben ja schon gesehen, daß ARCHIMEDES in seiner Schrift „De conoidibus et sphaeroidibus“ das Wort *ὑποτίθεσθαι* in der Form *ὑποτιθέμεθα* mehrfach gebrauchte, um Definitionen einzuführen¹¹⁴; in der Schrift „De corporibus fluitantibus“ hieß derselbe Terminus in der Form *ὑποκείσθω* „es soll zugrunde gelegt werden“, um Prinzipien der Mechanik der Flüssigkeiten einzuführen¹¹⁵. Dagegen werden in der anderen Schrift, „De planorum aequilibriis“ ganz analoge mechanische Prinzipien mit dem Wort *αἴτούμεθα* eingeführt¹¹⁶; diese letztere Stelle wird übrigens von PROKLOS mit dem Zusatz zitiert, daß ARCHIMEDES hier besser von „Axiomen“ hätte sprechen sollen¹¹⁷, während ARCHIMEDES selber

¹¹² Proclus (F) 76,17ff. Die Übersetzung der Stelle nach P. L. SCHÖNBERGER, Proklus Diadochus, Kommentar zum ersten Buch von Euklids Elementen, herausg. von M. STECK, Halle (Saale) 1945. Vgl. auch ARISTOT., Anal. post. I 10 76b 32.

¹¹³ FRITZ, K. v.: o. c. 42, mit Berufung auf D. ROSS, Aristotle's prior and posterior Analytics, Oxford 1949, 540.

¹¹⁴ Opera omnia (H) I 248 und 252; vgl. oben Anm. 28.

¹¹⁵ Opera II 318.

¹¹⁶ Opera II 124.

¹¹⁷ PROCLUS (F) 181, 17ff.

am Ende der Aufzählung dieser Prinzipien mit den Worten *τοίτων ὑποκειμένων* auf sie zurückverwies¹¹⁸; er bediente sich also zum zweiten Male desselben Verbums, wie in der Schrift „De corporibus fluitantibus“, und auch dadurch brachte er zum Ausdruck, daß für ihn *ὑπόθεσις*, *ὑποκείμενον* und *αἴτημα*, als mathematische Termini, ein und dasselbe waren.

2. Die Wortbedeutung des anderen Terminus, des *ἀξιώμα* — obwohl sie im Grunde ebenso einfach ist, wie die vorige — läßt sich dennoch nicht mehr so leicht genau feststellen. Man fand nämlich für diesen Ausdruck der euklidischen Mathematik schon in der Antike eine zwar bestechende, aber doch irreführende Quasi-Erklärung, die ihre Geltung in der Fachliteratur, leider, bis zu dem heutigen Tage beibehält, und dadurch den Weg des richtigen Verstehens so gut wie völlig versperre. Eben deswegen muß ich zunächst diese Pseudo-Erklärung und ihren Ursprung beleuchten.

PROKLOS beginnt seine Erklärungen über die euklidischen Axiome — nachdem er jene fünf von diesen, die er für authentisch hält, wörtlich angeführt hatte — mit den folgenden Worten¹¹⁹: *ταῦτ’ ἔστι τὰ κατὰ πάντας ἀναπόδεικτα καλούμενα ἀξιώματα, καθόσον ὑπὸ πάντων οὕτως ἔχειν ἀξιοῦται, καὶ διαμφισθῆται πρὸς ταῦτα οὐδεὶς*. Derselbe Satz heißt in SCHÖNBERGERs deutscher Übersetzung: „Dies sind die von allen als unbeweisbar erklärten *Axiome*, insofern ihre Richtigkeit von allen *anerkannt* und von niemand in Zweifel gezogen wird¹²⁰.“ — Die Übersetzung gibt zwar den bloßen Inhalt des griechischen Satzes leidlich gut wieder, aber sie verschleiert dennoch vor demjenigen, der nicht den griechischen Text, sondern nur die Übersetzung selber liest, daß PROKLOS nebenbei auch das Hauptwort *ἀξιώμα* mit einem Hinweis auf das Verbum *ἀξιοῦται* erklären wollte. Natürlich ist diese Erklärung des PROKLOS bis zu einem gewissen Grade allerdings tadellos, da das Hauptwort *ἀξιώμα* in der Tat aus dem Verbum *ἀξιώ* abgeleitet wurde; will man also die genaue Bedeutung des abgeleiteten Hauptwortes verstehen, so muß man auf seinen Ursprung, auf das Verbum zurückgehen. — Aber ob PROKLOS wirklich so verfuhr? — Selbstverständlich *nicht*, wie man es eben aus dem angeführten Zitat ohne jeden Zweifel feststellen kann. Anstatt nämlich unvoreingenommen die Bedeutung des Wortes *ἀξιώμα* selbst zu suchen, ging er von einem naiven Vorurteil aus, und bloß dazu suchte er eine Rechtfertigung, indem er auf die *eine* Bedeutung des Verbums *ἀξιώ* hinwies. Dieses Vorurteil, wofür in der Antike hauptsächlich ARISTOTELES verantwortlich zu sein scheint¹²¹, bestand daraus, daß das Wort *ἀξιώμα* — mindestens in der euklidischen Mathematik — einen solchen Satz bezeichnet, dessen Richtigkeit gar nicht bezweifelt werden kann. Wie derselbe PROKLOS ein anderes Mal unter ausdrücklichem Hinweis auf ARISTOTELES über die Axiome sagt: „alle würden es vermöge ihrer seelischen Veranlagung zugestehen, wenn auch einige aus Vorliebe für Disputationen Zweifel dagegen äußerten¹²².“ Es wäre also nur eine „Streitsüchtigkeit“, wenn einige die Richtigkeit der euklidischen Axiome — also wohl auch die Richtigkeit des Axioms 8.: „das Ganze ist größer als der Teil“ — bezweifelten. — Dieses letzte Zitat erklärt

¹¹⁸ Opera II 126.

¹¹⁹ PROCLUS (F) 193, 15—17.

¹²⁰ P. L. SCHÖNBERGERS zitierte Übersetzung S. 302.

¹²¹ Vgl. Á. SZABÓ, „Die Grundlagen in der frühgriech. Mathematik“ a. a. O.

¹²² PROCLUS (F) 182, 17 ff. vgl. SCHÖNBERGER 294.

nebenbei auch noch, warum man später in dem Euklid-Text unter stoischem Einfluß das Wort *ἀξίωμα* mit der Bezeichnung *κοινάι ἔργοια* („allen Menschen gemeinsame Vorstellungen“) vertauschen konnte? Eben darum, weil man das Wort in diesem Sinne erklärte: das „Axiom“ wäre ein Satz, der auch ohne Beweis *naturgemäß* immer für richtig gehalten wird. Es scheint, daß man in der Antike seit ARISTOTELES nie mehr daran dachte, daß die Gültigkeit der euklidischen Axiome auch ernstlich angezweifelt werden könnte. — Auch PROKLOS wollte eben diese Auffassung über das Wesen des Axioms mit der Etymologie des Wortes unterstützen, und sehr willkommen kam ihm dabei die Tatsache, daß das Zeitwort mit darauffolgendem Infinitiv in der Tat auch die Bedeutung „für recht halten“ besitzt¹²³.

Es wurde im Grunde dieselbe traditionelle Erklärung für die Bedeutung des Wortes *ἀξίωμα* zuletzt auch durch K. v. FRITZ wiederholt¹²⁴. Der einzige Unterschied war nur, daß der moderne Verfasser dabei auf die ursprüngliche Bedeutung des Verbums *ἀξιώ* „einschätzen“, „für würdig halten“ zurückgehen und aus dieser Bedeutung jenen mathematischen Sinn des Terminus *ἀξίωμα* ableiten wollte, den er stillschweigend ebenso von vornherein als bekannt voraussetzte, wie PROKLOS selber.

Nun glaube ich auf die folgenden Schwächen dieser traditionellen Erklärung hinweisen zu müssen:

1. Der mathematische Terminus *ἀξίωμα* ist ebenso *dialektischen* Ursprungs, wie die bisher behandelten Termini: *ὑπόθεσις*, *ὅρος*, *ἀλητήμα* etc. Es ist also verkehrt, eine etymologische „Begründung“ nur für den vermeintlichen mathematischen Sinn dieses Terminus zu suchen. Will man die Wortbedeutung genau verstehen, so muß man davon ausgehen, in welchem Sinne dieser Terminus in der *Dialektik* benutzt wurde. Denn es ist ja naheliegend, daß das Wort ursprünglich wohl auch in die Mathematik in demselben Sinne übernommen wurde.

2. Es gibt auch innerhalb der mathematischen Fachsprache unzweifelhafte Spuren davon, daß man das Wort *ἀξίωμα* ursprünglich auch hier nicht in dem Sinne verstand, wie es später PROKLOS erklären wollte. Es scheint, daß man eben erst in der Zeit nach ARISTOTELES die Bedeutung des mathematischen Terminus *ἀξίωμα* in dem Sinne *verdrehen* wollte, als ob dies Wort in der Mathematik einen Satz bezeichnete, der *naturgemäß* „für recht gehalten wird“.

Man kann eigentlich sehr leicht feststellen, in welchem Sinne das Wort *ἀξίωμα* in der dialektischen Terminologie benutzt wurde. K. v. FRITZ schrieb z. B. folgendes darüber: „ARISTOTELES gebraucht das Wort *ἀξίωμα* außerhalb der Schriften zur Dialektik und Logik auch einfach in der Bedeutung *Annahme*, *Meinung*, *Lehrstück* usw., ein Gebrauch, der sich aus der voraristotelischen Bedeutungsgeschichte des Verbums *ἀξιών* ohne weiteres verstehen läßt¹²⁵.“ — Noch weiter führen uns die folgenden sehr treffenden Worte desselben modernen Verfassers: „In der Topik (des ARISTOTELES) wird in der Behandlung des dialektischen Frage- und Antwortspiels das Wort *ἀξιών* häufig von dem Satz gebraucht,

¹²³ Für diese Bedeutung des Wortes *ἀξιώ* s. z. B. die in dem Pape-Wörterbuch angeführten Stellen: XEN. Cyr. 2,2,17; An. 5,5,9; PIND. Nem. 10,39 etc.

¹²⁴ FRITZ, K. v.: a. a. O. 29ff.

¹²⁵ FRITZ, K. v.: ebd. 35.

von dem der Frager hofft, daß ihn der Antworter zugeben wird. Dieses Zugeben selbst wird dann als *τιθέναι* bezeichnet (vgl. z.B. 155b 30ff.; 159a 14ff. und öfter). Wenn auf das *ἀξιοῦν* das *τιθέναι* gefolgt ist, kann das dialektische Schließen weitergehen¹²⁶. — Geht man noch weiter und fragt man: was der Sinn des Verbums *ἀξιοῦν* in dem eben genannten Zusammenhang sei, so braucht man keineswegs mit K. v. FRITZ auf die ursprüngliche Bedeutung des Zeitwortes *ἀξιώω* („für würdig halten“) zurückzugehen. Es wird viel einfacher, statt dessen das Pape-Wörterbuch aufzuschlagen und daraus festzustellen, daß das Verbum *ἀξιώω* unter anderen auch die sehr gewöhnliche Bedeutung „*bitten, verlangen, fordern*“ besaß¹²⁷. Diese letztgenannte Bedeutung des Zeitwortes *ἀξιώω* war in der Antike so gewöhnlich, daß es eigentlich völlig überflüssig ist, dafür noch Belege zitieren zu wollen. Nur beispielsweise seien hier zwei Platon-Stellen genannt: Resp. III 406D: *παρὰ τοῦ λαροῦ φάρμακον ἀξιοῦν* „von dem Arzt eine Arznei bitten“; Apol. 19D: *ἀξιώω* *ὑμᾶς ἀλλήλους διδάσκειν* „ich fordere euch auf, oder: ich bitte euch, euch gegenseitig belehren zu wollen“.

Natürlich hieß das Wort *ἀξιώμα* als dialektischer Terminus ursprünglich nur „*Forderung*“ — und gar nichts weiter. Dieselbe Bedeutung hatte dieses Hauptwort manchmal auch außerhalb der Dialektik. So hieß z.B. bei SOPHOKLES *ἀξιώμα* die *Forderung* der Götter¹²⁸. Ja, *ἀξιώμα* oder *ἀξιώσις* hieß manchmal auch die „*Bittschrift*“, das „*schriftliche Gesuch*¹²⁹“. — Von dieser Bedeutung des Wortes aus lassen sich auch die übrigen Bedeutungsschattierungen desselben Terminus innerhalb der dialektischen Terminologie sehr leicht erklären: *ἀξιώμα* heißt die Behauptung, deren Zugeben in der dialektischen Auseinandersetzung durch den einen Gesprächsteilnehmer von seinem Partner *gefordert* wird, genau so, wie das vorhin behandelte Wort *αίτημα*; und darum heißt *ἀξιώμα* auch „*Behauptung*“, „*Annahme*“, „*Lehrstück*“ usw.

Es sei noch ausdrücklich betont: es scheint, daß im Sinne der älteren, vor aristotelischen Gebrauchsart dieses Terminus auch gar keine solche Bedeutungsschattierung in dem Wort *ἀξιώμα* steckte, als ob man die „*ἀξιώμα*“ genannte „*Forderung*“, „*Behauptung*“ hätte leicht erfüllen, zugeben können, als ob *ἀξιώμα* etwa eine „*glaubwürdige Annahme*“ wäre. Nein, im Gegenteil! Man hat eher den Eindruck, daß *ἀξιώμα* in der Dialektik — genau so wie *αίτημα* — eben jene „*Behauptung*“ (eigentlich: „*Forderung*“) hieß, zu der die Zustimmung des Dialogpartners in der Schwebe gelassen wurde. Das ersieht man z.B. aus der folgenden Platon-Stelle¹³⁰:

„Du weißt doch, daß die Mathematiker lachen würden, wenn man versuchte, die Einheit zu zerlegen, und sie ließen es nicht gelten. Wolltest du nämlich die Eins zerlegen, so würden sie dieselbe statt dessen vervielfältigen. Denn sie wollten

¹²⁶ FRITZ, K. v.: ebd. 32 Anm. 32.

¹²⁷ Ich will damit nicht bestreiten, daß sich die Bedeutung des Verbums *ἀξιώω* „*verlangen, fordern*“ sehr gut aus der Urbedeutung „*für würdig halten*“ entwickeln konnte. Aber es wäre irreführend, diese Etymologie auch in den weiteren Bedeutungsentwicklungen desselben Wortes in den Vordergrund zu stellen. Denn dieses Zeitwort bezeichnet ja sehr oft gerade die „*falsche Forderung*“, bzw. die „*falsche Behauptung oder Annahme*“, wie z.B. Her. 6,87, Plat. Menex. 239E usw.

¹²⁸ Oid. Col. 1451.

¹²⁹ Siehe die Stellen im Pape-Wörterbuch stv.

¹³⁰ PLATON: Resp. VII 526.

es ja vermeiden, daß die Eins jemals etwas anderes als sie selbst, d.h. also, daß sie als eine Vielheit erscheine. Wenn sie dann jemand fragte: „Ihr Wunderlichen, von was für Zahlen sprecht ihr eigentlich? Wo ist denn die Eins, wie ihr sie fordert (*περὶ πολῶν ἀριθμῶν διαλέγεσθε, ἐν οἷς τὸ ἐν οἷς ὑμεῖς ἀξιοῦτε ἔστι*), nämlich etwas in sich völlig Gleiches, Unterschiedloses, keine Teile Enthaltes?“ — was würden sie darauf wohl antworten? — Ich glaube, sie würden sagen, daß sie lediglich von gedachten Zahlen sprechen, die man nur erschließen kann, und die nicht auch sinnlich wahrnehmbar sind.“

Man sieht also, daß die Mathematiker eine ganz besondere Art der „Eins“ *fordern*, und diese ihre *Forderung* eben mit dem Zeitwort *ἀξιοῦ* umschrieben wird. Aber das Zitat selber zeigt, daß in diesem Fall die „Forderung“ oder die „Annahme“ gar nicht derartig war, daß sie auch von den Dialogpartnern hätte leicht zugegeben werden können.

Das Wort *ἀξιωμα* ist also als dialektischer Terminus seiner Bedeutung nach ein genau entsprechendes Synonym zu dem Ausdruck *ἀτημα*. Betrachtet man die Gebrauchsart dieser Termini innerhalb der Dialektik, so sieht man *gar keinen Unterschied* zwischen den Ausdrücken *ἀτέω*, *ἀτημα* einerseits, und *ἀξιώ*, *ἀξιωμα* andererseits.

Dasselbe gilt auch für die Mathematik — wenn man nur EUKLID und die daran anschließende Literatur einstweilen *nicht* in Betracht zieht. Auch bei den Mathematikern ist *ἀξιωμα* bloß ein Synonym zu dem Ausdruck *ἀτημα*. Man ersieht dies nicht bloß aus dem Wortgebrauch der einzelnen Mathematiker — besonders aus demjenigen des ARCHIMEDES, bei dem *ὑπόθεσις*, *ὑποκείμενον*, *ἀτημα*, *ἀξιωμα*, *λαμβανόμενον* etc. gleichwertige Synonyme sind¹³¹ — sondern dasselbe wird auch durch PROKLOS ausdrücklich bezeugt. PROKLOS sagt nämlich — gleich danach, daß er bemerkte: ARCHIMEDES gebraucht den Terminus *ἀτέω* auch in einem solchen Fall, in dem nach seiner (des PROKLOS) Terminologie eher „Axiom“ gesagt werden sollte: „Andere wiederum bezeichnen alle Anfangssätze als *Axiome*, wie auch alle solche Sätze, die eines Beweises bedürfen, als *Theoreme*¹³².“ PROKLOS ist sich also dessen völlig bewußt, daß die griechische Terminologie der mathematischen Prinzipien in der Wirklichkeit gar nicht einheitlich ist. Wohl möchte er mindestens die Spuren einer solchen Unterscheidung dieser Prinzipien, an die er aus EUKLID gewöhnt ist, auch bei den anderen Mathematikern entdecken. Aber die Tatsachen entsprechen seiner Erwartung überhaupt nicht. Bei den anderen Mathematikern sind die eben genannten Ausdrücke eigentlich nur Synonyme voneinander.

3. Die bisherigen Betrachtungen führten zu dem merkwürdigen Schluß, daß in der mathematischen Terminologie der Griechen — wenn man EUKLID selbst außer acht läßt — weder die *ὑπόθεσις* im allgemeinen von den *ἀτηματα* und *ἀξιωματα*, noch diese beiden letzteren Termini voneinander scharf unterschieden wurden. Diese Ausdrücke galten so sehr als bloße Synonyme, daß sie auch austauschbar untereinander waren. — Um so dringender stellt sich die Frage, warum dieselben Termini in EUKLIDS Zusammenstellung doch unterschieden werden?

¹³¹ Vgl. dazu K. v. FRITZ, o. c. 57 und P. TANNERY, Mém. Scient. II 59.

¹³² PROCLUS (F) 181, 16ff.: „*Ἡδη δὲ οἱ μὲν πάντα ἀτήματα . . . οἱ δὲ πάντα ἀξιώματα προσαγορεύοντιν.*

Besonders auffallend ist dabei die euklidische Unterscheidung der *αἰτήματα* und *ἀξιώματα*, wo diese beiden Namen der bloßen Wortbedeutung nach doch dasselbe besagen. Was mag nun der Sinn dieser interessanten Unterscheidung gewesen sein?

Es sei zunächst vorausgeschickt, daß die Erklärungen, die bei PROKLOS eben diese Frage zu beantworten versuchen, für die historische Forschung keineswegs beruhigend sind — obwohl sie an sich zum Teil auch treffende Behauptungen enthalten. Ohne daß ich alle diese Erklärungsversuche des PROKLOS im einzelnen ausführlich besprechen wollte, seien hier doch einige von ihnen genannt.

1. Eine scheinbar sehr treffende Erklärung für den Unterschied der euklidischen *αἰτήματα* und *ἀξιώματα* heißt bei PROKLOS folgendermaßen: Die *αἰτήματα* wären nur der Geometrie eigen, während die *ἀξιώματα* in jeder Wissenschaft, die mit der Quantität etwas zu tun hat, ihre Geltung hätten¹³³. — Treffend ist diese Erklärung insofern allerdings, daß die Postulate (*αἰτήματα*) bei EUKLID rein geometrischer Art sind. Aber seine *ἀξιώματα* sind gar nicht mehr ohne Ausnahme für alle quantitativen Wissenschaften so völlig allgemeingültig, wie man dies im Sinne der Erklärung erwarten sollte; unter diesen gibt es schon mindestens einen solchen Satz¹³⁴, der nur in der Geometrie (ja, eigentlich nur in der Planimetrie) einen Sinn zu haben scheint; das ist das 7. Axiom: „was sich deckt, ist gleich“. — Wollte man also an der Behauptung des PROKLOS festhalten, daß nämlich die euklidischen *ἀξιώματα* für alle quantitativen Wissenschaften gelten, so dürfte man unter *ἀξιώματα* nur einen Teil der Gleichheitsaxiome verstehen. — Aber selbst in diesem Fall könnte die eben angeführte Unterscheidung des PROKLOS nur als eine mehr oder weniger treffende Beschreibung des euklidischen Sachverhaltes, und nicht als eine historische Erklärung dafür gelten. Denn es fragt sich, ob EUKLID in der Tat in demselben Sinne diese beiden Termini unterscheiden wollte, wie diese Erklärung? Hat man z. B. nicht erst *nachträglich* erkannt, daß die meisten Gleichheitsaxiome auch Grundlagen der Arithmetik sind¹³⁵? Selbstverständlich beginnt die moderne Arithmetik mit Gleichheitsaxiomen, ja es werden darin EUKLIDS Gleichheitsaxiome sogar noch ergänzt, z. B. wurden die Reflexivität und Symmetrie der Gleichheit bei EUKLID nirgends ausgesprochen. Aber ob die Tatsache, daß auch die Arithmetik Gleichheitsaxiome benutzt, schon zur Zeit der Aufstellung der euklidischen *ἀξιώματα* bewußt war? Soweit ich sehe, wurde z. B. die älteste, pythagoreische Arithmetik allerdings noch ohne den bewußten Gebrauch der Gleichheitsaxiome aufgebaut. — Es fragt sich auch, warum denn die *ἀξιώματα* bei EUKLID erst an zweiter, ja sogar an dritter Stelle, nach den *αἰτήματα* genannt werden, wo sie — im Sinne der versuchten Erklärung — doch allgemeingültiger als die nur der Geometrie eigenen *αἰτήματα* sind? Hätte EUKLID diese Gruppen nicht eben in umgekehrter Reihenfolge aufzählen müssen, wenn er in der Tat eine solche Unterscheidung im Sinne hatte, wie diese Erklärung des PROKLOS es meint? — Und vor allem: warum konnte sich dieselbe Unterscheidung nicht in der ganzen antiken Mathematik durchsetzen, wenn

¹³³ PROCLUS (F) 182, 6ff.; vgl. 58, 7ff.

¹³⁴ Das andere bloß geometrische Axiom, das 9., dürfte als unecht gelten.

¹³⁵ Diese Erkenntnis ist allerdings schon bei ARISTOTELES, An. post. I 10 76 a 37 ff. belegt; vgl. K. v. FRITZ, o. c. 25.

EUKLID in der Tat so richtig eben die allgemeinsten Grundlagen der quantitativen Wissenschaften (die Gleichheitsaxiome) hätte als *ἀξιώματα* benennen wollen?

2. Die eben genannte Erklärung für den Unterschied der euklidischen *αἰτήματα* und *ἀξιώματα* enthielt zwar zweifellos auch richtige Beobachtungen, aber sie konnte selbst die antiken Theoretiker nicht völlig befriedigen. Man ersieht dies z.B. aus jener Proklos-Stelle¹³⁶, die den vorigen Erklärungsversuch eigentlich aufgibt, und statt dessen eine dreifache Unterscheidung der *ἀξιώματα* selbst vorschlägt: es gäbe Axiome, die nur der Arithmetik, und andere, die nur der Geometrie eigen wären, während wieder andere Axiome sowohl für Arithmetik als auch für Geometrie gelten sollten. Als ein Beispiel für das arithmetische Axiom nennt PROKLOS den Satz: „die Eins ist Teiler von allen Zahlen“. — Nun gibt es aber ein solches *ἀξίωμα* bei EUKLID überhaupt nicht. Wohl ist der beispielsweise genannte Satz nur eine andere Formulierung der euklidischen Definition für die Zahl (Elem. VII def. 2): „Zahl ist die aus Einheiten zusammengesetzte Menge“; daraus folgt ja, daß die Eins Teiler von jeder Zahl sein muß. Aber das hat mit den euklidischen *ἀξιώματα* gar nichts zu tun. Das Beispiel für die arithmetischen *ἀξιώματα* könnte also höchstens als eine Illustration dafür gelten, wie PROKLOS das Wesen des *ἀξίωμα* verstand. — Auch seine vorgeschlagene dreifache Unterscheidung der *ἀξιώματα* ist für die Erforschung der Axiomatikgeschichte eigentlich belanglos, ebenso belanglos, wie auch manche gezwungenen „Theorien“ des ARISTOTELES über das Wesen der mathematischen Axiomatik¹³⁷.

3. Der dritte Erklärungsversuch des PROKLOS, der hier noch genannt werden soll, läuft darauf hinaus, daß sich die *ἀξιώματα* von den *αἰτήματα* ebenso unterscheiden, wie auch die Lehrsätze (*θεωρήματα*) von den Aufgaben (*προβλήματα*) verschieden sind¹³⁸; oder wie derselbe Gedanke ausführlicher entwickelt heißt: „das *αἴτημα* trägt uns auf, zur Darlegung eines Akzidens irgendeinen Gegenstand zu beschaffen und ausfindig zu machen, der einfach und leicht zu finden ist; das *ἀξίωμα* hingegen [trägt uns auf], irgendein wesentliches Akzidens zu nennen, das ohne weiteres den Hörenden bekannt ist, wie z.B. daß das Feuer warm ist oder irgendeine andere Wahrheit von höchster Klarheit, deren Bezweiflern gegenüber wie sagen, es fehle ihnen an gesundem Verstand oder sie bedürften der Züchtigung¹³⁹“. — Auch diese merkwürdige Unterscheidung ist keineswegs vollständig beruhigend, ja sie trifft sogar auch als bloße Beschreibung des Sachverhaltes nur mit gewissen Einschränkungen zu. Der Vergleich der *αἰτήματα* mit den Aufgaben (*προβλήματα*) trifft nämlich nur in dem Falle zu, wenn man unter „Aufgaben“ bloß Konstruktionsaufgaben versteht. Das Wort *πρόβλημα* heißt im mathematischen Sprachgebrauch bloß „Aufgabe“ (eigentlich eine „Schwierigkeit“, die gelöst werden soll — *λύειν* oder *ἀναλύειν*¹⁴⁰), und man kann unter „Aufgabe“ natürlich sowohl eine „Beweis“- als auch eine „Konstruktionsaufgabe“

¹³⁶ PROCLUS (F) 184, 12ff.

¹³⁷ Siehe den „Anhang“.

¹³⁸ PROCLUS (F) 178, 12ff.

¹³⁹ Ebd. 181, 5ff.; vgl. A. FRENKIAN, Le postulat chez Euclide et chez modernes, Paris 1940, 19, 1.

¹⁴⁰ Auch die genaue Erklärung der Wortgeschichte von diesen Termini wäre eine dringende Aufgabe der historischen Forschung.

verstehen¹⁴¹. Ein *πρόβλημα* ist z.B. auch der Satz: Eucl. Elem. X. App. 27 (ed. H): „Es sei uns (die Aufgabe) vorgelegt, zu zeigen, daß die Diagonale des Quadrats zu der Seite desselben inkommensurabel ist.“ Aber die vorigen Proklos-Zitate wollen die *ἀτίματα* doch nicht mit den Aufgaben überhaupt, sondern nur mit den Konstruktionsaufgaben vergleichen. In der Tat sind mindestens die ersten drei euklidischen *ἀτίματα* ohne Zweifel Konstruktionspostulate: es wird in ihnen die Möglichkeit gewisser sehr einfacher Konstruktionen gefordert. Dieser Hinweis des letztgenannten Erklärungsversuches wird uns später noch beschäftigen. — Aber dennoch ist auch diese Erklärung des PROKLOS mangelhaft, nicht nur darum, weil der besagte Vergleich der *ἀτίματα* mit den Konstruktionsaufgaben eigentlich *nur* im Falle der ersten drei euklidischen Postulate zutreffend ist — diesem Mangel ließe es sich noch sehr leicht abhelfen —, sondern auch darum, weil sie das Wesentlichste an den *ἀξιώματα* nicht genügend zu beleuchten vermag. Ja, die Behauptung, daß die Wahrheit der euklidischen *ἀξιώματα* mit nüchternem Verstand auch nicht bezweifelt werden könnte, steht wieder allzusehr im Banne des ARISTOTELES und unter dem Einfluß der falsch verstandenen Wortbedeutung.

4. Wir suchen zunächst eine Antwort auf die Frage: warum die euklidischen Axiome eine Sonderbezeichnung erhielten? Ob auch bei EUKLID das Wort *ἀξιώματα*, das ursprünglich statt der Bezeichnung *κοινωνίαι ἔργοια* gebraucht wurde, nur ein Synonym für *ἐποθέσεις* war, wie bei ARCHIMEDES die Ausdrücke *ἐποθέσεις* und *ἀξιώματα* nur Synonyme sind, oder ob die euklidische Unterscheidung der *ἀξιώματα* von den *ἐποθέσεις* etwas wesentliches über die Entwicklungsgeschichte der Axiomatik verrät?

Man findet in unserem heutigen Euklid-Text insgesamt neun Axiome. Diese Gruppe von Prinzipien ist auffallend einheitlich. Abgesehen nämlich von dem letzten, dem 9. Axiom sagen alle diese Sätze je eine grundlegende Behauptung über die *Gleichheit* aus. Eben wegen der Einheitlichkeit der Gruppe vermutete man auch, daß das 9. Axiom, das *nicht* über die Gleichheit spricht („zwei Geraden schließen keine Fläche ein“), erst nachträglich der Gruppe hinzugefügt worden sei¹⁴². Die euklidischen Axiome sind also Gleichheitssätze. Es kann auch das 8. Axiom — „das Ganze ist größer als der Teil“ — trotz seiner abweichenden Form — als ein sozusagen „negativer Satz“ über die Gleichheit gelten, da es eben die Möglichkeit bestreitet, daß der „Teil“ dem „Ganzen“ gleich sei, wie ich zuletzt darauf hingewiesen hatte¹⁴³. — Es fragt sich nun, warum diese Sätze über die Gleichheit als *ἀξιώματα* benannt wurden? Nach der bloßen Wortbedeutung soll ja diese Bezeichnung zum Ausdruck bringen, daß die Zustimmung zu den so bezeichneten Behauptungen als Anfangssätzen einer Beweisführung zwar *gefordert* wird, aber ob diese Forderung in Erfüllung geht, in der Schwebe gelassen bleibt. Inwiefern konnte die Zustimmung zu den euklidischen Gleichheitsaxiomen verweigert werden?

Es wird sich lohnen, die euklidischen Gleichheitsaxiome vor allem mit jenen „*beinahe mathematischen*“ Gleichheitssätzen zu vergleichen, die man in dem

¹⁴¹ Sehr bezeichnend sind dafür die Worte des Scholiasten (J. L. HEIBERG) Euclides, Elementa, vol. V: 114, 6ff.

¹⁴² HEIBERG, J. L.: Euclides, Elementa, vol. I 10 und O. BECKER, Grundlagen der Mathematik 90.

¹⁴³ „Die Grundlagen in der fröhligriech. Mathematik“ a. a. O.

platonischen „Theaitos“ liest¹⁴⁴. Die beiden platonischen Gleichheitssätze heißen nämlich — wie sie in dieser Untersuchung einmal schon wörtlich zitiert wurden:

1. „ein Ding wird weder größer noch kleiner, weder in seiner Masse noch seiner Zahl nach, solange es *sich selbst gleich ist*“, und

2. „wozu nichts hingelegt und wovon nichts weggenommen wird, das kann weder wachsen noch abnehmen, sondern es bleibt immer *sich selbst gleich*“.

Prüft man diese Sätze genauer, so sieht man, daß sie eine doppelte Definition dafür versuchen, was „sich selbst gleich“ heißt. Der erste Satz besagt, daß der Begriff selber das Größer-Werden oder Kleiner-Werden jenes Dinges worauf die Bezeichnung „sich selbst gleich“ angewendet wird, in jeder Hinsicht ausschließt. Der zweite Satz kehrt dieselbe Behauptung um, und besagt, daß das Ding, bei dem das Größer-Werden und Kleiner-Werden *nicht* vorhanden, „sich selbst gleich“ ist.

Nun sind aber die beiden eben zitierten Gleichheitssätze für uns besonders deswegen interessant, weil sie durch PLATON selbst keineswegs als *ἀξιώματα* — wie die euklidischen Gleichheitssätze —, sondern als *ὅμολογήματα* bezeichnet werden. Man weiß schon aus dem vorigen Kapitel, was *ὅμολογημα* als synonymer Ausdruck für *ἐπόθεσις* in der dialektischen Terminologie heißt: es heißt das, worüber die Dialogpartner *einig geworden sind*. — Es ist in der Tat kaum möglich, daß ein denkender Mensch etwas gegen die beiden vorigen *ὅμολογήματα* über die „Gleichheit“ (genauer: über das „Sich-selbst-gleich-Sein“) einzuwenden hätte. Denn diese Sätze sind ja völlig *formal*. Der erste Satz gibt nur in anderen Worten eine Erklärung für den Sinn des Ausdrückes „sich selbst gleich“; er ist also eine regelrechte und formale Definition; der zweite Satz wendet dieselbe formale Erklärung umgekehrt an, und man empfindet es als selbstverständlich, daß auch die Umkehrung der vorigen formalen Erklärung nur wahr sein kann. — Auf alle Fälle konnten die antiken Dialetkiker solche *rein formale* Sätze für „besonders starke Behauptungen“ (vgl. PLATON, „Phaidon“ 100A) halten; sie kamen ihnen *nicht* als Abstraktionen irgendwelcher praktisch-empirischer Erfahrungen vor, sondern als reine Gedankenkonstruktionen, die ebenso widerspruchsfrei galten, wie das Urbild aller solcher Sätze, die berühmte These des PARMENIDES selber: *τὸ ὅν ἔστι*, „das Seiende ist“.

Dagegen prüfe man jetzt die euklidischen Axiome über die Gleichheit. Diese heißen:

1. Die demselben gleich sind, sind auch untereinander gleich.
2. Wenn Gleiche zu Gleichen hinzugefügt werden, sind auch die Summen gleich.
3. Wenn Gleiche von Gleichen abgezogen werden, sind auch die Reste gleich.
4. Wenn zu Ungleichen Gleiche hinzugefügt werden, sind die Summen ungleich.
5. Die Doppelten desselben sind untereinander gleich.

¹⁴⁴ PLATON: „Theait“. 155A.

6. Die Hälften desselben sind untereinander gleich.]
7. Die sich decken, sind untereinander gleich.
8. Das Ganze ist größer als der Teil.

Es gibt unter diesen Aussagen gar keinen einzigen solchen nur formalen Satz, wie die vorhin behandelten platonischen *ὅμοιογίματα*. Im Gegenteil! Diese Aussagen beschreiben eine solche Beziehung zwischen *zwei* Dingen („gleich“), die gewissermaßen schon in sich selbst „widerspruchsvoll“ ist. Denn es ist ja gar nicht selbstverständlich, daß man auf *zwei* Dinge, die voneinander verschieden, also keineswegs dasselbe sind — darum sind es ja *zwei* Dinge —, doch die Bezeichnung „untereinander gleich“ anwenden kann. Selbstverständlich ist nur, daß ein Ding *sich selbst*, aber nicht, daß es auch einem *anderen* noch gleich sei! — Die euklidischen Gleichheitssätze sind Behauptungen, deren Wahrheit durch die praktisch-empirische Erfahrung, ja in einigen Fällen sogar unmittelbar durch die sinnliche Wahrnehmung selbst kontrolliert wird. Zum Beispiel gilt das 7. Axiom — „die sich decken, sind untereinander gleich“ — deswegen als wahr, weil man sinnlich konkret wahrnehmen, sehen kann, daß die planimetrischen Figuren, die sich decken, in der Tat gleich sind. Dasselbe gilt auch für das 8. Axiom: „das Ganze ist größer als der Teil“. Auch bei dieser Behauptung überzeugt man sich von der Wahrheit der Aussage am einfachsten so, daß man durch seine Sinnesorgane feststellt, mit den Augen sieht, daß bei den geometrischen Figuren¹⁴⁵ das Ganze allerdings immer größer als der Teil ist.

Denkt man nun daran, daß im Sinne der Eleaten-Dialektik die Sinneswahrnehmungen zu der Erkenntnis der Wahrheit gar nicht zulässig sind — „Laß dich nicht durch die vielerfahrene Gewohnheit auf diesen Weg zwingen: deinen Blick den ziellosen, dein Gehör das brausende und deine Zunge walten zu lassen! Nein, mit dem Verstande bringe die vielumstrittene Prüfung, die ich dir riet, zur Entscheidung“, hieß es schon bei PARMENIDES¹⁴⁶ — so sieht man sofort ein, daß die Behauptungen, die bei EUKLID ursprünglich nicht als *κοινά ἔργα* sondern als *ἀξιώματα* bezeichnet waren, keineswegs als *ὅμοιογίματα* oder als *ὑποθέσεις* einer dialektischen Auseinandersetzung gelten konnten. Wohl konnte man auch in diesen Fällen *fordern*, daß die Behauptung, deren Wahrheit durch jede Sinneswahrnehmung garantiert zu sein schien, der Untersuchung zugrunde gelegt werde, aber die Zustimmung des Dialogpartners zu dieser Forderung mußte schon in der Schwebe gelassen werden. Darum hießen diese Behauptungen nicht *ὅμοιογίματα*, sondern bloß *ἀξιώματα*.

Man weiß in der Tat schon längst, daß eben das Problem der *Gleichheit* durch die Eleaten in einem völlig anderen Sinne als in EUKLIDS Axiomen, behandelt wurde. O. BECKER schrieb z. B. zuletzt — allerdings noch vor mehr als dreißig Jahren — folgendes über diese Frage¹⁴⁷: „Das Paradoxon (des ZENON) von

¹⁴⁵ Die euklidischen Axiome galten ursprünglich wohl nur für die Geometrie. Vgl. O. BECKER, Grundlagen der Mathematik 90.

¹⁴⁶ DIELS-KRANZ: Vorsokratiker⁸ I 28 Parmenides B7.

¹⁴⁷ „Mathematische Existenz, Untersuchungen zur Logik und Ontologie mathematischer Phänomene“, Halle a. d. S. 1927, 144. — O. BECKER weist daselbst auf P. TANNERY (Revue philosophique, XX p. 385, 1885) und B. RUSSELL (The Principles of Mathematics, Vol. I § 331 p. 350 und §§ 340—341 p. 358—60, Cambridge 1903) hin.

Achilles und der Schildkröte läßt sich auf eine mengentheoretische Form bringen. Die Paradoxie läuft, so aufgefaßt, darauf hinaus, daß im Falle des Einholens der Schildkröte durch Achilles, der von diesem zurückgelegte, um ein Vielfaches längere Weg der von jener in derselben Zeit durchmessenen, viel kürzeren Strecke punktweise umkehrbar eindeutig zugeordnet werden kann, indem die gleichzeitig von beiden Läufern innegehabten Punkte einander entsprechen. Dies ist nichts anderes als die bekannte mengentheoretische Tatsache, daß *zwei aktual unendliche Mengen gleichmächtig sein können, obwohl die eine ein echter Teil der andern ist*, so wie hier der Weg der Schildkröte ein echter Teil des Wegs des Achilles ist.“ — Über diese, im wesentlichen zweifellos richtige Beobachtung hinausgehend konnte ich vor kurzem nachweisen, daß in der Tat selbst die These — „*zwei aktual unendliche Mengen sind gleichmächtig, selbst wenn die eine ein echter Teil der anderen ist*“ — durch ZENON in irgendeiner antiken Form auch unmittelbar ausgesprochen werden mußte¹⁴⁸. Allerdings kann man den aristotelischen Bericht, wonach ZENON bewiesen hätte, daß „*die halbe Zeit der doppelten gleich wäre*¹⁴⁹“, nur in diesem Sinne beruhigend erklären. Ja, ich vermutete sogar, daß das 8. euklidische Axiom — „*das Ganze ist größer als der Teil*“ — gerade *gegen* diese These des ZENON aufgestellt wurde. — Den Argumenten, die ich für diese letztere Vermutung schon in meiner früheren Arbeit namhaft machen konnte, sei hier noch folgendes hinzugefügt.

Wie bekannt, wurden von den überlieferten acht ersten euklidischen Axiomen das *vierte*, *fünfte* und *sechste* durch den Herausgeber, J. L. HEIBERG als unechte athetiert. Er berief sich dabei, was das *fünfte* und *sechste* betrifft, auf PROKLOS (ed. F 196, 25 ff.), der dieselben „Axiome“ ebenfalls für überflüssig hielt¹⁵⁰; ja, er wollte sogar mit derselben Begründung auch Interpolationen in EUKLIDS Sätzen — Elem. I 37 und 38 — entdecken, da diese Sätze dieselben athetierten „Axiome“ beinahe wörtlich zitieren. — Nun haben in diesem Fall sowohl PROKLOS als auch HEIBERG insofern allerdings recht, daß die athetierten „Axiome“ für das euklidische Werk eigentlich überflüssig sind; man kann auch ohne sie die ganze euklidische Geometrie tadellos aufbauen. Es fragt sich nur, wie diese mit Recht athetierten „Axiome“ dennoch in den Euklid-Text gerieten? Die Theorie von P. TANNERY, wonach nicht nur diese Sätze sondern überhaupt die euklidischen Prinzipien aus dem Text der „Elemente“ selbst erst *nachträglich* abstrahiert worden wären¹⁵¹, scheint auch prinzipiell unhaltbar zu sein. Denn im Gegenteil, gerade unter den euklidischen Grundlagen findet man manches Überlieferungsgut, das selbst zu EUKLIDS Zeiten schon überholt sein mußte und nur traditionsmäßig auch weiterhin beibehalten wurde. Das könnte sehr wohl auch mit dem 5. und 6. „Axiom“ der Fall sein: „*die Doppelten desselben (d.h. derselben Quantität) sind untereinander gleich*“ und „*die Hälften desselben (derselben Quantität) sind untereinander gleich*“. — Was mag nur — irgendwann einmal — der Anlaß gewesen sein, solche merkwürdige Sätze einerseits über die Gleichheit der *Doppelten* und anderseits über die Gleichheit der *Hälften* derselben Quantität

¹⁴⁸ „Die Grundlagen in der fröhligriech. Mathematik“ und „Der älteste Versuch einer definitorisch-axiomatischen Grundlegung der Math.“ a. a. O.

¹⁴⁹ DIELS-KRANZ: Vorsokratiker⁸ I 29 Zenon A 29 (=ARISTOT., Phys. Z. 9.239 b 33).

¹⁵⁰ Vgl. J. L. HEIBERG, Euclides, Elementa, vol. I 91.

¹⁵¹ TANNERY, P.: Mém. Scient. II 53.

aufzustellen? — Mir ist aus der antiken Literatur nur ein einziger Fall bekannt, der als Veranlassung in Betracht käme: Die Paradoxie des ZENON hieß nämlich: „die halbe Zeit ist ihrem *Doppelten* gleich“. Diese paradoxe Aussage, in der also nicht nur der Begriff der Gleichheit, sondern auch diejenigen der „*Hälften*“ und des „*Doppelten*“ eine interessante Rolle spielten, wurde — wie ich zuletzt schon gezeigt hatte — eigentlich mittels Strecken veranschaulicht; ZENON zeigte, wie die *Hälften* einer Strecke ihrem *Doppelten* (der ganzen Strecke) „gleich“ sejn soll. — Denke man nun daran, wie die antiken Theoretiker diese paradoxe Behauptung zu widerlegen trachteten. Es war natürlich völlig unmöglich einen Gegenbeweis in dem Sinne zu liefern, daß man eine Widersprüchlichkeit in ZENONS Argumenten nachgewiesen hätte. In dieser Beziehung war ZENONS Beweisführung allerdings tadellos. Auf der anderen Seite kam eine solche „Widerlegung“, wie diejenige bei ARISTOTELES und seinen Schülern — solange man überhaupt ein Verständnis für das Wesen der Eleaten-Dialektik hatte — kaum in Betracht. Mußte man sich also nicht eben deswegen veranlaßt fühlen, zu allen Einzelheiten der paradoxen zenonschen Behauptung in unbewiesenen grundlegenden *Forderungen* (in Axiomen) Stellung zu nehmen? — Denkt man an diese nur vermutungsweise gestellte Frage, so erscheinen auf einmal nicht weniger als vier nacheinander stehende euklidische Axiome in einem ganz merkwürdigen Licht. Es scheint nämlich, als bildeten die folgenden vier Axiome eine kompakte und zusammenhängende Einheit, die sich gerade gegen die erwähnte zenonsche Paradoxie richtet:

5. Die *Doppelten* desselben sind untereinander gleich.
6. Die *Hälften* desselben sind untereinander gleich.
7. Die sich *decken*, sind untereinander gleich. (Bei ZENON deckten sich natürlich jene Strecken nicht, deren „Gleichheit“ doch behauptet wurde.)
8. Das *Ganze* ist größer als der Teil.

Natürlich genügt von diesen Sätzen zum Aufbau der euklidischen Geometrie auch das 8. Axiom allein in sich. Man kann nicht nur das 5. und 6., sondern mit ebensoviel Recht beinahe auch das 7. athetieren, auch das wird ja bei EUKLID so gut wie nie gebraucht¹⁵². — Ich glaube also, daß EUKLID die eben aufgezählte Gruppe von Axiomen ebenso *traditionsmäßig* und gedankenlos von seinen Vorgängern übernahm, wie er es auch mit den Definitionen der „geraden Linie“ und der „ebenen Fläche“ und mit den Termini ἑτερόμηκες, ὁρμός, ὁμοβοειδές, τολπινός, πολύτλευρα etc. tat¹⁵³.

Wir können also diese Betrachtungen über die euklidischen Axiome einstweilen mit den folgenden Feststellungen abschließen: EUKLIDs Gleichheitssätze sind empirische Aussagen, deren Wahrheit man nur mit sinnlicher Wahrnehmung kontrollieren kann, und die eben deswegen die Ansprüche der Eleaten auf reine, bloß intellektuelle Erkenntnisweise — ohne jede Inanspruchnahme der Sinnesorgane — nicht befriedigen. Ursprünglich hat man diese Sätze als *ἀξιώματα* benannt, da sie bloß als „*Forderungen*“ in der dialektisch-theoretischen Auseinandersetzung galten. Da man jedoch in der Zeit nach PLATON das Wesentliche

¹⁵² FRITZ, K. v.: o. c. 76f.

¹⁵³ TANNERY, P.: Mém. Scient. II 540—544 und 48—63.

der Eleaten-Dialektik kaum mehr zu verstehen vermochte, versuchte man auch den alten dialektisch-mathematischen Terminus *ἀξιώματα* in einem neuen Sinne umzudeuten. Man berief sich nämlich immer wieder darauf, daß die Wahrheit dieser Axiome mit nüchternem Verstand ebensowenig zu bezweifeln wäre wie die Tatsache, daß das Feuer warm ist. So wurde das *ἀξίωμα* zu einer Wahrheit, die „naturgemäß für recht gehalten wird“. Diese Umdrehung der alten Wortbedeutung vollzog sich Hand in Hand damit, daß ARISTOTELES auch die genialen Paradoxe des ZENON für bloße Sophismen erklärte. Aber selbst in der neuen Bedeutung schien das Wort *ἀξίωμα* in dem Euklid-Text immer noch unbehaglich zu sein; darum schrieb man bald statt der alten Bezeichnung lieber: *κοινά ἔργα* („allen Menschen gemeinsame Vorstellungen“). Damit gelang es schließlich den dialektischen Ursprung nicht nur des Ausdruckes sondern auch der Gattung selbst so gut wie völlig zu verschleieren¹⁵⁴.

5. Man versteht schon im Sinne des bisherigen den Unterschied der *ἀξιώματα* und der (echten) *ἐποθέσεις*. Aber warum unterscheidet unser Euklid-Text die *ἀξιώματα* auch von den *ἀτήματα*, wo die beiden Namen der bloßen Wortbedeutung nach doch dasselbe besagen? Was ist der historische Ursprung der euklidischen Postulate? — Um diese Fragen beantworten zu können, müssen wir vor allem die fünf euklidischen Postulate etwas näher besehen. Diese heißen nämlich:

„Es sei gefordert:

1. daß man von jedem Punkt zu jedem Punkt die Strecke ziehen kann,
2. daß man eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern kann,
3. daß man mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen kann,
4. daß alle rechten Winkel einander gleich sind,
5. und daß, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, daß die innen auf derselben Seite entstehenden Winkel zusammen kleiner

¹⁵⁴ TANNERY, P. (s. die vorige Anm.) hat darauf aufmerksam gemacht, daß EUKLID seine Postulate wohl auch gar nicht mit dem Titel *ἀτήματα* kenntlich zu machen brauchte; er konnte diese einfach mit dem Ausdruck *ἡτησθω* beginnen, und dadurch wurden diese Sätze schon als Postulate gekennzeichnet. — Aber warum hat man nicht eine ähnliche Form auch für die euklidischen Axiome? TANNERY erblickte auch in dieser Tatsache ein Argument dafür, daß die euklidischen Axiome „nicht authentisch“ wären. — Nun kann man in der Tat einen wesentlichen Unterschied in der sprachlichen Formulierung der Postulate einerseits und der Axiome andererseits beobachten. Die Postulate beginnen mit dem *Imperativ* (*ἡτησθω*), und dementsprechend steht das Verb in dem anderen Satz — bei allen fünf Postulaten — im *Infinitiv*. Man müßte dieselbe sprachliche Konstruktion auch bei den Axiomen erwarten, wenn man das Wort *ἀξίωμα* in demselben Sinne verstanden hätte, wie das Wort *ἀτῆμα*. — Meiner Ansicht nach ist die abweichende Satzkonstruktion im Falle der Axiome nur eine Folge davon, daß man das Wort *ἀξίωμα* schon in dem Sinne *κοινά ἔργα* umgedeutet hatte. Aber man kann immer noch einen Beleg dafür angeben, daß man auch später fühlte: in dem Wort *ἀξίωμα* steckt irgendwie eine Art „Aufrorderung“; darum heißtt bei PROKLOS (181, 5ff.): „das *ἀτῆμα tragt uns auf* ... irgendeinen Gegenstand *zu beschaffen*; das *ἀξίωμα* dagegen [trägt uns auf] irgendein Akzidens *zu nennen* etc.“

als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.“

Es werden in der Fachliteratur Sinn und Bedeutung dieser Postulate — seit einer grundlegenden Arbeit von H. G. ZEUTHÉN (1896) — ziemlich einheitlich beurteilt¹⁵⁶. O. BECKER schrieb z.B. zuletzt folgendes darüber: „Die Postulate haben die Aufgabe, die mathematische Existenz gewisser Grundgebilde zu sichern, aus denen die weiteren existierenden Figuren konstruktiv aufgebaut werden, nämlich von Geraden, Kreisen und ihren Schnittpunkten. Das berühmte 5. Postulat sichert z.B. die Existenz des Schnittpunktes konvergierender Geraden¹⁵⁶.“

Nicht so völlig einheitlich wird in der Fachliteratur die Frage beantwortet: aus welcher Zeit wohl diese Postulate entstammen mögen? — P. TANNERY wollte z.B. — von der Beobachtung ausgehend, daß ARISTOTELES die mathematischen Postulate noch nicht zu kennen scheint, und daß das *aἰτημα*, wie er es definiert, wohl nur ein Terminus der Dialektik wäre — mindestens die ersten drei Postulate EUKLID selber zuschreiben¹⁵⁷; dabei wollte er seine Vermutung, daß das 4. und 5. Postulat *nicht* von EUKLID stammen könnten, mit der etwas überraschenden Ansicht begründen: diese Sätze wären zu dem Verfasser der „Elemente“ *überhaupt nicht würdig*¹⁵⁸. — Dagegen schrieb TH. HEATH gerade das 5. und 4. Postulat EUKLID zu, mit der etwas zögernden Bemerkung: „wenn nicht überhaupt alle Postulate von EUKLID selber stammen¹⁵⁹“. Es scheint also — trotz abweichender Beurteilung der Einzelheiten —, daß der Gedanke: die Postulate stammten (oder mindestens ein Teil der Postulate stammte) von EUKLID selber, in der Zeit nach TANNERY zu einer Art „communis opinio“ wurde. So schrieb auch J. E. HOFMANN in seiner kleinen Zusammenfassung¹⁶⁰: „Die Postulate dürften ein wichtiger methodischer Zusatz von EUKLID selbst sein.“ — Erst in der allerletzten Zeit machten sich Bestrebungen bemerkbar, dieselben Postulate doch irgendwie in die voreuklidische Zeit hinaufzudatieren. K. v. FRITZ behauptete z.B. mit einer Berufung auf PROKLOS (ed. F. 179), daß die konstruktiven Postulate 1—3 durch den Platon-Schüler SPEUSIPPOS eingeführt worden seien¹⁶¹. Nun glaube ich zwar gar nicht, daß diese Vermutung zutreffend

¹⁵⁶ ZEUTHEN, H. G.: Die geom. Konstruktion als Existenzbeweis, Math. Ann. 47 1896 222—228; Geschichte der Mathematik im Altertum und Mitt. Kopenhagen, 1896. — ZEUTHEN schrieb (Geschichte etc. 120): „In Übereinstimmung damit, daß die Probleme der Alten im wesentlichen Sätze über die Existenz, und ihre Lösungen Beweise für die Existenz des Behandelten und Gesuchten sind, sind die Postulate *Behauptungen über dessen Existenz*, deren Anerkennung ohne Beweis oder Nachweis verlangt wird.“ — Siehe dagegen A. FRAJSE, „Sur la signification des postulats euclidiens“, Archives Internationales d’Histoire des Sciences, 1951 382—392 und „La matematica nel mondo antico“, Roma 1951 92—97.

¹⁵⁷ BECKER, O.: Das math. Denken der Antike, Göttingen 1957, 19.

¹⁵⁸ TANNERY, P.: Mém. Scient. II 48—63.

¹⁵⁹ Dagegen A. FRENKIAN, o. c. 15 und C. THAER, Antike Mathematik 1906—1930 (Jahresbericht über die Fortschritte der klass. Altertumswiss., begr. von C. BURSIAN, herausg. von A. THIERFELDER, Jahrg. 1943 II Bd. 283—284) S. 22.

¹⁶⁰ HEATH, TH.: A History of Greek Mathematics, vol. I. Oxford 1921, 375.

¹⁶¹ HOFMANN, J. E.: Geschichte der Mathematik, I. Teil, Sammlung Göschen Bd. 226, Berlin 1953, 32.

¹⁶¹ FRITZ, K. v.: o. c. 97.

wäre — auch die genannte Proklos-Stelle scheint mir diese Ansicht nicht im mindesten zu unterstützen¹⁶² —, aber ich finde die Bestrebung selbst doch bemerkenswert.

Es sind nämlich auch andere Versuche angestellt worden, um die Vorgeschichte der euklidischen Postulate zu klären. O. BECKER konnte z.B. eine sehr wahrscheinlich anmutende „Urform“ des euklidischen 5. (und damit auch des 4.) Postulates rekonstruieren¹⁶³. Wohl ist mit diesem bloßen Versuch — mag er auch noch so einleuchtend sein — keineswegs eindeutig erwiesen, daß es Postulate auch schon in der voreuklidischen Zeit gab; aber einen historischen Sinn hat ein solcher Versuch doch nur dann, wenn man von der Annahme ausgeht, daß mindestens die Gattung der Postulate nicht von EUKLID selbst stammt, auch diese Art Prinzipien irgendwie die Erbschaft voreuklidischer Zeiten darstellen. — Eben an diesem Punkte möchte ich ansetzen. Ich versuche im folgenden den Ursprung der *Gattung* selbst zu klären. Dabei wird diesmal das Problem des 5. und 4. Postulates, da es eigentlich eine besondere Frage für sich ist, gar nicht behandelt. Statt dessen möchte ich die Aufmerksamkeit auf die Konstruktionspostulate im engeren Sinne, d.h. also auf die ersten drei lenken. Aus welcher Zeit mögen wohl diese entstammen?

6. Ich glaube, daß man diese Frage im Grunde eigentlich auch schon früher richtig beantwortet hatte. Ich muß die diesbezügliche Ansicht vielleicht nur etwas eindeutiger und schärfer formulieren. — O. BECKER schrieb nämlich, nachdem er Sinn und Bedeutung der euklidischen Postulate charakterisierte (diese sicherten die mathematische Existenz gewisser Grundgebilde, aus denen die weiteren existierenden Figuren konstruktiv aufgebaut werden): „Diese konstruktive Auffassung der mathematischen Existenz geht bis in das 5. Jahrhundert, auf OINOPIDES, zurück, der zuerst elementare Konstruktionen, wie das Fällen eines Lots, mit Zirkel und Lineal allein durchführte. In der platonischen Schule scheint sich die Beschränkung auf diese Instrumente überall da, wo sie möglich war, durchgesetzt zu haben, etc.¹⁶⁴.“

Zweifellos ist dieser Hinweis auf OINOPIDES im Zusammenhang mit der Vorgeschichte der euklidischen Postulate etwas sehr wesentliches. Denn der Name OINOPIDES wird ja in dem Euklid-Kommentar des PROKLOS auch zweimal im Zusammenhang mit je einer geometrischen Konstruktion genannt. Diese Stellen sind für uns so wichtig, daß ich sie hier beide anführen muß.

Der Satz *Eucl. Elem. I 12* heißt: „Auf eine gegebene unbegrenzte Gerade ist von einem gegebenen Punkte, der nicht auf ihr liegt, eine senkrechte Linie *⟨Lot⟩* zu ziehen.“ — Zu diesem Satz bemerkt PROKLOS¹⁶⁵: „Dieses Problem machte zuerst OINOPIDES zum Gegenstand seiner Forschung da er es für die Astronomie für nützlich hielt. Er nennt aber die Senkrechte in altertümlicher Weise *nach dem Gnomon*, weil auch der Gnomon (Zeiger der Sonnenuhr) mit dem Horizont rechte Winkel bildet.“ — Die andere Proklos-Stelle über OINOPIDES ist eine Bemerkung anlässlich des Satzes *Eucl. Elem I 23*: „An einer gegebenen Geraden

¹⁶² Siehe gegen diese Vermutung auch O. BECKER, Archiv f. Begriffsgesch. 4, 213.

¹⁶³ BECKER, O.: ebd. 212–218.

¹⁶⁴ BECKER, O.: Das math. Denken der Antike 19f.

¹⁶⁵ PROCLUS (F) 283, 7ff. Die Übersetzung nach SCHÖNBERGER.

ist in einem auf ihr gelegenen Punkte ein einem gegebenen geradlinigen Winkel gleicher geradliniger Winkel zu konstruieren <abzutragen>.“ Zu diesem Satz wird bemerkt: „Auch hier liegt ein Problem vor, das nach der Versicherung EUDEMS eigentlich von OINOPIDES gefunden wurde¹⁶⁶.“

Nun sind die beiden Konstruktionen so äußerst einfach, daß man sich zunächst wundert: warum überhaupt in diesen Fällen die Urheberschaft des OINOPIDES der Erwähnung wert war? Steckte in der Tat die Geometrie zur Zeit des OINOPIDES, also etwa um 440 v. u. Z. herum, noch so sehr in den Kinderschuhen, daß man selbst so einfache Konstruktionen noch nicht gekannt hätte¹⁶⁷? Man hat diese Vermutung mit Recht abgelehnt. Schließlich war ja OINOPIDES doch nur ein etwas älterer Zeitgenosse des HIPPOKRATES von Chios, dessen Geometrie schon ein sehr hohes Niveau hatte, sowohl nach der Zahl der bekannten Sätze, als auch nach den Anforderungen, die man an die Exaktheit der Beweisführung stellte¹⁶⁸. — Auch die beiden Berichte des PROKLOS über OINOPIDES müssen also in einem anderen Sinne erklärt werden.

Die diesbezüglichen Vermutungen von TH. HEATH lassen sich in drei Punkten zusammenfassen; die „drei“ Punkte besagen zwar im Grunde ein und dasselbe, aber doch mögen sie hier alle „drei“ aufgezählt werden, so wie sie durch ihren Urheber selber formuliert wurden¹⁶⁹:

1. OINOPIDES war wohl der erste, der die genannten Probleme *nur mit Lineal und Zirkel* durchführte;
2. er mag auch der erste gewesen sein, der für diese Probleme eher eine *theoretische* als eine bloß praktische Lösung fand;
3. die Bedeutung des OINOPIDES mag wohl darin bestanden haben, daß er die Methode *von theoretischem Gesichtspunkt aus* vervollkommnete.

Ich finde diese Vermutungen sehr wahrscheinlich. Nur zu dem ersten Punkt muß ich eine Bemerkung machen. Wie soll man nämlich die Behauptung verstehen, daß OINOPIDES als erster die genannten Probleme „nur mit Lineal und Zirkel“ durchgeführt hätte? Unsere Quelle, PROKLOS spricht ja an den angeführten Stellen mit keinem Wort von „Lineal und Zirkel“! — Und doch ist HEATHS Vermutung keineswegs unbegründet, nur seine Ausdrucksweise ist einer Erklärung bedürftig. — Es besteht gar kein Zweifel darüber, daß jene euklidischen Konstruktionsaufgaben (Elem. I 12 und 23), die PROKLOS veranlaßten, je eine Bemerkung über OINOPIDES zu machen, *nur* von theoretischem Gesichtspunkt aus interessant sind. Man hatte ja *praktische* Lösungen für dieselben Aufgaben wohl schon seit undenklichen Zeiten, ebenso wie auch Lineal und Zirkel in der handwerklichen Praxis seit sehr alter Zeit her in Gebrauch waren. Statt der einfachen praktischen Lösung mußte in den euklidischen Sätzen gezeigt werden, wie man solche Aufgaben unter der Anwendung der *ersten drei Postulate* löst. Nun wird aber in diesen Postulaten — von praktischem Gesichtspunkt aus

¹⁶⁶ Ebd. 333, 5—6.

¹⁶⁷ STEELE, A.D.: „Über die Rolle von Zirkel und Lineal in der griech. Mathematik“. Quell. u. Studien etc. B3 (1936) 287ff., 304.

¹⁶⁸ WAERDEN, B.L. V. D.: Erwachende Wissenschaft 213—214.

¹⁶⁹ HEATH, TH.: o. c. I. 175.

betrachtet — eben die Benutzung von Lineal und Zirkel zu den geometrischen Konstruktionen sanktioniert¹⁷⁰. Man kann von jedem Punkt zu jedem Punkt die Strecke ziehen (1. Postulat), und man kann eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern (2. Postulat), weil man das Lineal benutzen darf; man kann auch mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen (3. Postulat), weil man nicht nur das Lineal, sondern ebenso auch den Zirkel benutzen kann. — Die Behauptung also, daß OINOPIDES die genannten Probleme „nur mit Lineal und Zirkel durchführte“, ist mit der anderen gleichwertig: OINOPIDES *kannte und verwendete bewußt die ersten drei euklidischen Postulate*. Ja, er mag sogar der Urheber dieser Postulate gewesen sein, wenn er wirklich — wie HEATH vermutete — „als erster eine theoretische Lösung für diese Probleme fand“. Was könnte denn sonst auch jene Behauptung heißen, daß er „die Methode von theoretischem Gesichtspunkt aus vervollkommen“? — Wollte man diese Erklärung bestreiten und das Entstehen der ersten drei euklidischen Postulate doch auf eine spätere Zeit setzen, so müßte man auch die auf OINOPIDES bezügliche Überlieferung bei PROKLOS für einen bloßen Irrtum erklären. Denn eine andere beruhigende Auslegung der Proklos-Worte, als diejenige von HEATH, ist doch wohl kaum möglich.

7. Die letzten Betrachtungen führten uns zu der Vermutung, daß die ersten drei euklidischen Postulate wohl noch aus dem 5. Jahrhundert entstammen, ja vielleicht sogar OINOPIDES selber ihr Urheber war. Diese Datierung darf uns eigentlich gar nicht überraschen, nachdem sich auch die euklidischen Gleichheitsaxiome ungefähr auf dieselbe Zeit setzen ließen. Auch für diese Art *ἀξιώματα* gilt als frühester „Terminus post quem“ das Paradoxon des ZENON: „die halbe Zeit ist der doppelten gleich“. Nun liegt aber das Zeitalter des OINOPIDES demjenigen des ZENON auffallend nahe, ja man kann eine scharfe zeitliche Grenze zwischen den beiden überhaupt kaum feststellen.

Aber wozu hat man überhaupt solche Postulate aufgestellt? — Die Art, wie man diese Frage zu beantworten versucht, scheint mir nicht völlig beruhigend zu sein. Man denkt sich nämlich den Ursprung der Konstruktionspostulate etwa folgendermaßen¹⁷¹. Als existent (wirklich vorhanden) gelten in der antiken Geometrie nur diejenigen Figuren, die sich konstruktiv herstellen lassen. Zu diesem Zweck sichern die Postulate die mathematische Existenz gewisser Grundgebilde, nämlich von Geraden, Kreisen und ihren Schnittpunkten, aus denen dann die weiteren existierenden Figuren konstruktiv aufgebaut werden. — Selbst wenn man diese Erklärung ohne jeden Vorbehalt bejahren würde, bliebe immer noch ungeklärt die Frage: was wohl historisch der Anlaß gewesen sein mag, die mathematische Existenz gerade in diesem Sinne aufzufassen? Und warum heißen dabei jene Behauptungen, die eben die Existenz der einfachsten Grundgebilde zu sichern berufen sind, nur Postulate, *ἀξιώματα*? Dieser Ausdruck ist ja dialektischen Ursprungs und er bezeichnet eine solche *Forderung*, zu der die Zustimmung des Dialogpartners *in der Schwebe gelassen bleibt*. Inwiefern gilt diese unsere frühere Worterklärung für die euklidischen Postulate?

¹⁷⁰ Vgl. J. E. HOFMANN, o. c. 32.

¹⁷¹ Zu dem folgenden vgl. O. BECKER, Math. Existenz 130ff. (nach H. G. ZEUTHEN).

Die „Forderungen“ der ersten drei euklidischen Postulate scheinen auf den ersten Anblick so einfach, selbstverständlich und leicht erfüllbar zu sein, daß man zunächst wohl geneigt wäre, anzunehmen: man sollte das Wort *αἰτημα* in diesem Fall auch gar nicht so ganz genau nehmen. Wohl mag dies Wort (*αἰτημα*) ursprünglich eine solche „Forderung“ oder „Annahme“ in der dialektischen Auseinandersetzung bezeichnet haben, zu der die Zustimmung des Dialogpartners in der Schwebe gelassen wurde; aber hätte es überhaupt einen Sinn, an diese ursprüngliche Bedeutung des Terminus sich auch im Falle der euklidischen *αἰτήματα* klammern zu wollen? — Nun glaube ich allerdings, daß es gerade der Fall ist. Die euklidischen *αἰτήματα* waren eben solche „Forderungen“ im allerursprünglichsten Sinne des dialektischen Terminus. Um diese Ansicht von mir begründen zu können, muß ich einige Sätze aus dem Euklid-Kommentar des PROKLOS (in SCHÖNBERGERS Übersetzung) zitieren. (Ich hebe im Text einige Ausdrücke hervor, auf die es uns in diesem Zusammenhang gerade ankommt.)

„Die Möglichkeit, von jedem beliebigen Punkt zu jedem beliebigen Punkt eine Gerade zu ziehen, folgt daraus, daß die Linie *ein Fließen* des Punktes ist, und die Gerade ein gleichgerichtetes und unablenkbares *Fließen*. Stellen wir uns also vor, der Punkt führe eine gleichgerichtete und kürzeste *Bewegung* aus, so werden wir zu dem anderen Punkte hingelangen, und die erste Forderung ist erfüllt ohne komplizierten Denkvorgang unsererseits. Stellen wir uns nun in gleicher Weise eine durch einen Punkt begrenzte Gerade vor, deren Endpunkt eine kürzeste und gleichgerichtete *Bewegung* ausführt, so ist die zweite Forderung auf leichtem und einfachem Wege verwirklicht. Stellen wir uns dagegen vor, die begrenzte Gerade verharre mit dem einen Ende in Ruhe, und mit dem anderen *bewege sie sich* um den ruhenden Endpunkt, so wäre das die dritte Art der Forderung¹⁷².“

Ich will mich jetzt gar nicht darüber aufhalten, daß diese kurze Erklärung des PROKLOS auf je eine solche Definition der „Linie“ und der „geraden Linie“ Bezug nimmt, die uns aus EUKLID selbst gar nicht bekannt ist: „die Linie ist *ein Fließen des Punktes*“ und „die gerade Linie ist *ein gleichgerichtetes und unablenkbares Fließen des Punktes*“. Viel interessanter ist für uns jetzt die Tatsache, daß PROKLOS die „Einfachheit“ der ersten drei euklidischen Postulate mit der Einfachheit gewisser *Bewegungsarten* erklären will. In der Tat ist die „Forderung“ der fraglichen Postulate *ohne Bewegung* überhaupt unerfüllbar. — Aber ob die „Bewegung“ wirklich so etwas völlig einfaches und gar nicht problematisches ist, wie die eben angeführten Worte des PROKLOS sie erscheinen lassen möchten? — Selbst der späte Kommentator war sich noch völlig im klaren darüber, daß hier ein im Grunde doch nicht leichtes Problem vorliegt. Darauf deuten seine nächstfolgenden Worte hin¹⁷³:

„Würde aber jemand Schwierigkeiten geltend machen durch die Frage, wie wir *Bewegung* hineinragen in die unbewegte geometrische Welt und wie wir das, was keinen Teil hat (nämlich den Punkt) *bewegen*: *Denn das sei völlig undenkbar*, so wollen wir ihn bitten, sich nicht allzusehr zu grämen ... Die Bewegung müssen wir uns nicht körperlich sondern vorstellungsmäßig (griechisch: *ώνυμος φανταστική*)

¹⁷² Den griechischen Text s. PROCLUS (F) 185, 8ff.

¹⁷³ PROCLUS (F) 185, 25 ff.

vorstellen, und wir dürfen nicht zugeben, daß das, was keinen Teil hat (der Punkt), körperlicher Bewegung unterworfen sei, daß es vielmehr Bewegungen der Phantasie unterliege. Denn der unteilbare ‚Nus‘ bewegt sich, wenn auch nicht in örtlicher Weise; und auch die Phantasie hat, entsprechend ihrem unteilbaren Sein, ihre eigene Bewegung. Wir aber schauen nur auf die körperliche Bewegung und verwerfen die Bewegung bei den unausgedehnten Wesen etc. etc.“

Zum Glück brauchen wir uns mit einer Auslegung dieser „beruhigenden Worte“ des PROKLOS nicht allzusehr zu bemühen. Wichtiger ist für uns die Tatsache, daß das angeführte Zitat sozusagen eine *dialektische Auseinandersetzung* reproduziert, in der auch die Gegner, d.h. jene Dialogpartner zu Worte kommen, die die geforderte *Bewegung* für „undenkbar“ halten. PROKLOS scheint zwar diesen Einwand bloß dahin verstehen zu wollen, daß die Bewegung des Punktes (des Dinges, das keine Teile hat und darum auch nicht etwas körperliches ist) unmöglich sei. Er gibt also gerne zu, daß die *körperliche* Bewegung dessen, was *gar kein Körper ist* — das ist nämlich der Punkt —, wirklich undenkbar sei. Darum schlägt er lieber eine andere, „nicht körperliche“ eher „vorstellungsmäßige“ (wörtlich: „phantastische“) Art der Bewegung vor. — Das ist natürlich schon kaum mehr etwas anderes, als nur abstruse Spekulation, die man bei dem verdienstvollen Euklid-Kommentator lieber vermissen möchte. — Aber ob jene Dialogpartner, die gegen die *Bewegung* in der Geometrie protestierten, nicht aus einem anderen Grunde die „Bewegung“ für undenkbar hielten? — Man weiß in der Tat, daß es sehr bedeutende Männer gab — und dazu noch gerade in den Jahrzehnten, die dem Zeitalter des OINOPIDES, des vermutlichen Urhebers der ersten drei euklidischen Postulate unmittelbar voraufgingen —, die die Widersprüchlichkeit, d.h. also eben die *Undenkbarkeit* jeder Bewegung überhaupt in glänzenden Argumentationen nachzuweisen vermochten. Das waren die Eleaten, und besonders ZENON, der die Gedanken des PARMENIDES am eindringlichsten formulierte¹⁷⁴.

Denkt man nun an diese Tatsache, so versteht man auch, warum die ersten drei euklidischen Postulate aufgestellt werden mußten. Ohne Bewegung ist gar keine geometrische Konstruktion möglich. Wollte man die Konstruktion theoretisch ermöglichen, so mußte man mindestens jene Formen der Bewegung zulassen, die zu der Erzeugung der allereinfachsten geometrischen Grundgebilde (Geraden, Kreise usw.) unerlässlich nötig sind. In der Tat sichern die ersten drei euklidischen Postulate eben die Möglichkeit der einfachsten geometrischen Konstruktionen, bzw. jener *Bewegungen*, die zu diesen nötig sind, aber nur in der Form je einer *Forderung*; das Geforderte heißt in diesem Fall: *αἰτήμα, daß es keineswegs so widerspruchsfrei wie eine echte ἐπόθεσις ist* — es fordert ja gerade etwas widerspruchsvolles, die Bewegung selbst —, und eben deswegen auch die *Zustimmung* des Dialogpartners zu einer solchen Forderung in der Schwebe gelassen bleibt.

Die euklidischen *αἰτήματα* wurden also ähnlicherweise gegen die Eleaten aufgestellt¹⁷⁵, wie auch die vorhin behandelten *ἀξιώματα*.

¹⁷⁴ Über die Eleaten s.: Á. SZABÓ, „Zur Gesch. der griech. Dialektik“, „Zur Gesch. d. Dialektik des Denkens“ und „Zum Verständnis der Eleaten“ a. a. O.

¹⁷⁵ Es ist interessant, daß man auch früher schon irgendeinen Zusammenhang der euklidischen Axiomatik mit der Philosophie der Eleaten vermutete, ohne jedoch diese Vermutung näher zu begründen; vgl. z.B. bei J. E. HOFMANN, o. c. 32.

IV. Euklid's dreifache Unterscheidung der Prinzipien

Die vorangestellten Betrachtungen haben uns das Beantworten der Frage: was eigentlich der Sinn jener Dreiteilung der mathematischen Prinzipien ist, der man am Anfang der euklidischen „Elemente“ begegnet, und wie man historisch zu dieser dreifachen Unterscheidung kam — einigermaßen erleichtert. Soviel kann man auch jetzt schon behaupten, daß diese dreifache Unterscheidung wohl damals entstand, als man die allerersten Versuche anstelle, die Geometrie theoretisch zu begründen. Wir müssen im folgenden eben diese theoretische Begründung der *Geometrie* etwas näher ins Auge fassen. — Es wird sich jedoch lohnen, vor allem daran zu erinnern, was sich schon über die theoretische Begründung der ältesten griechischen *Arithmetik* feststellen ließ.

1. Ich glaube zuletzt folgendes über die Grundlagen jener pythagoreischen Arithmetik, deren Fragmente uns im VII. Buch der euklidischen „Elemente“ erhalten blieben, nachgewiesen zu haben¹⁷⁶. „Die beiden ersten Definitionen am Anfang des VII. Buches — diejenige der *Eins* und diejenige der *Zahl* — verraten deutlich den eleatischen Einfluß. Der ausschlaggebende Faktor war bei der Abfassung dieser Aussagen (VII def. 1 und 2): das Problem der Teilbarkeit, bzw. das Unteilbarkeitsdogma der Eleaten. — Auch andere wichtige Definitionen der Arithmetik — wie z.B. *gerade Zahl*, *ungerade Zahl*, *Teil einer Zahl*, *Menge von Teilen einer Zahl*, *Primzahl* und *Nicht-Primzahl* — lassen sich leicht als organische Weiterbildungen der eleatischen Philosophie erklären. In einigen von diesen Fällen verrät selbst die Terminologie eindeutig den eleatischen Einfluß. Darum ist die pythagoreische Arithmetik auch gar nichts anderes als eine Weiterbildung der eleatischen Lehre. Diese Weiterbildung ergab sich daraus, daß man an dem eleatischen Unteilbarkeitsdogma — im Sinne des eleatischen Prinzips von der Widerspruchsfreiheit — festhalten wollte. Darum vervielfältigte man die *Eins* mittels einer Definition zur *Zahl*, und man schuf — um die sich daraus ergebenden Probleme lösen zu können — wieder nach eleatischem Vorbild weitere, dichotomische Definitionen. So kam unter den Griechen die älteste definitorische Grundlegung der Arithmetik, wahrscheinlich noch in der ersten Hälfte des 5. Jahrhunderts v. u. Z. zustande.“

Man kann diese Feststellungen jetzt noch mit dem folgenden ergänzen: Jene *τύπος*-Anwendung, die wir im II. Kapitel dieser Untersuchung ausführlicher besprachen, und die eine Erbschaft der eleatischen Philosophie war, ließ sich eigentlich nur auf dem Gebiete der *Arithmetik* ohne größere Schwierigkeiten zur Geltung bringen¹⁷⁷. Man sah schon, daß die allererste *τύπος* in der dialektischen Auseinandersetzung die Definition — d.h. die „Abgrenzung“ des Gegenstandes von dem was *nicht* der Gegenstand ist — sein mußte; denn eben durch diese Abgrenzung sicherte man die widerspruchsfreie Grundlage für die weitere Gedankenführung. Selbstverständlich wurden in dieser Abgrenzung die *abstrakten*

¹⁷⁶ Das folgende Zitat wiederholt die Schlußfolgerungen der beiden Kap.: „Die Einheit und die Zahlen“ und „Die Teilbarkeit der Zahlen“ aus meiner Arbeit: „Der älteste Versuch einer definitorisch-axiomatischen Grundlegung der Math.“, a. a. O.

¹⁷⁷ Zu den Schwierigkeiten der Alten in der theoretischen Begründung der *Geometrie* vgl. das Kap.: „Die Teilbarkeit und die Geometrie“ in meiner eben genannten Arbeit (s. die vorige Anm.).

Begriffe immer bevorzugt, da bei diesen die gedankliche Widerspruchsfreiheit am leichtesten zu erreichen war. Es leuchtete z. B. ohne Schwierigkeiten einem jeden ein, daß der völlig abstrakte Begriff des „Schönen“ oder des „Gleichen“ (*τὸ καλόν* oder *τὸ ισον*) an sich nie in sein Gegenteil hinübergehen kann. Je konkreter dagegen das Ding war, worüber man redete — d. h. je mehr man seine Nähe zu den Erscheinungen der Sinneswelt fühlte —, um so mehr bestand die Gefahr der Widersprüchlichkeit. (Nach der Erkenntnis der Eleaten galten alle Dinge der sinnlichen Erfahrung als widerspruchsvoll.) — Nun hielt man aber die *Zahlen* verständlicherweise für „abstrakter“ als die *geometrischen Figuren*. Man konnte sich, was die Zahlen betrifft, darauf berufen, daß die Arithmetik ganz und gar nicht dulde, daß man ihr Zahlen mit *sichtbarem* und *tastbarem* Körper zugrunde lege¹⁷⁸; die Zahlen wären bloß gedankliche Elemente, denen man anders als auf gedanklichem Wege auch gar nicht näher kommen könnte¹⁷⁹. Dasselbe ließ sich über die geometrischen Figuren keineswegs behaupten; diese waren ja doch mindestens *sichtbar*.

Der eben angedeutete wesentliche Unterschied der Zahlen und der geometrischen Gebilde war letzten Endes auch der Grund dafür, daß sich in der Antike eine Axiomatik der Arithmetik eigentlich *nicht* entwickeln konnte. Ich meine, es wurde in der Antike nicht bewußt, daß auch der Aufbau der Arithmetik auf Grundsätzen beruht, die nicht unmittelbar aus den Definitionen folgen. Im Banne der Erkenntnis, daß die Zahlen „körperlose“, „nur gedankliche Elemente“ sind, wollte man mindestens in jener Arithmetik, die aus EUKLIDS „Elementen“ bekannt ist — ohne die Zuhilfenahme empirisch gewonnener Gesetze auskommen. Deswegen findet man am Anfang des VII. Buches der „Elemente“ nur Definitionen und keine sonstigen Prinzipien der Arithmetik. Man scheint auch die Tatsache, daß ein Teil der euklidischen Axiome nicht nur für die Geometrie sondern auch für die Arithmetik gültig ist, erst *nachträglich* erkannt zu haben. Aufgestellt wurden diese *ἀξιώματα* allerdings nur im Hinblick auf die Geometrie.

2. Es schien anfangs wohl überhaupt nicht möglich zu sein, daß man die Grundsätze der Eleaten auch auf die Geometrie anwende. Denn die Eleaten haben ja die Existenz des Raumes rundweg geleugnet¹⁸⁰. ZENON vermochte die Widersprüchlichkeit des Begriffes „Raum“ mit zahlreichen Argumenten nachzuweisen¹⁸¹. — Nun leugnet man aber den Raum, so ist auch die Wissenschaft von dem Raum, die Geometrie gar nicht möglich. Ist der Raum etwas widerspruchsvolles, so gehört er in die Reihe jener Dinge, die nach eleatischer Auffassung wohl durch sinnliche Wahrnehmungen zu erfahren, aber nicht durch reines, widerspruchsfreies Denken zu begreifen sind. Als ein solches Ding betrachteten die Eleaten z. B. auch die „Bewegung“. Denn selbstverständlich mußten auch sie zugeben, daß die „Bewegung“ *praktisch* stattfinden kann; durch sinnliche Wahrnehmungen kann man diese auf Schritt und Tritt erleben. Das eleatische *Leugnen* der Bewegung hieß eigentlich nur so viel, daß sie meinten: wohl wäre die Bewegung sinnlich wahrnehmbar, aber nicht durch logisches, widerspruchsfreies Denken

¹⁷⁸ PLATON: Resp. VII 525D.

¹⁷⁹ Ebd. 526.

¹⁸⁰ PLATON: „Theait“. 180E.

¹⁸¹ Vgl. W. CAPELLE, Die Vorsokratiker, Leipzig 1935, 172f.

zu begreifen. Ähnlich muß man auch den eleatischen Satz — „es gäbe keinen Raum“ — verstehen. In diesem Satz kommt der Gedanke zum Ausdruck, daß es über den *Raum* kein widerspruchsfreies Denken möglich sei. Mit anderen Worten heißt dies auch so viel, daß nach eleatischer Auffassung das „Wissen von dem Raum“ wohl ähnlich zu beurteilen wäre, wie das „Wissen von der Bewegung“; diese beiden Dinge wären nur *Ergebnisse sinnlicher Wahrnehmungen*.

Es scheint, daß die ältesten Theoretiker der Mathematik ursprünglich auch diese eleatische Beurteilung des „Wissens von dem Raum“ übernahmen. Für diese Vermutung spricht die Tatsache, daß nach einem Bericht des JAMBЛИЧOS (in der „Vita Pythagorica“) PYTHAGORAS die Geometrie als *ιστορίη* bezeichnete¹⁸². Nun überlegt man sich jedoch, daß einerseits die Pythagoreer ihre wissenschaftliche Tätigkeit, und besonders ihre Lehre von den Zahlen, mit dem stolzen Namen der *μαθήματα* bezeichneten¹⁸³, und daß andererseits das Wort *ιστορίη* nur ein empirisches, durch Sehen gewonnenes Wissen bezeichnen kann¹⁸⁴, so läßt sich der Bericht des JAMBЛИЧOS auch gar nicht anders auslegen, als daß man zu jener Zeit — in der die Geometrie noch *ιστορίη* hieß — in dieser nur ein praktisches, erfahrungsmäßiges Wissen und kein echtes *μάθημα* erblicken wollte. — Selbst PROKLOS scheint noch davon zu wissen, daß man wohl erst verhältnismäßig später die Geometrie als ein Teilgebiet der Mathematik anerkannte; und auch dann hat man ihr nur den zweiten Platz nach der Arithmetik zugewiesen. Man ersieht dies z.B. aus den folgenden Worten des PROKLOS: „Daß nun die Geometrie ein Teil der ganzen Mathematik ist, und daß sie den zweiten Platz nach der Arithmetik einnimmt ..., das wurde durch die Alten begründet, und es braucht hier nicht ausführlicher erörtert zu werden¹⁸⁵.“ Derselben Ansicht ist über die Rangordnung der beiden Wissenschaften auch PLATON¹⁸⁶. Ja, man kann sogar aus PLATONS Werken eindeutig nachweisen, daß dieses Beurteilen sowohl des Problems „Raum“ als auch des Wissens von dem Raum, der „Geometrie“ ohne Zweifel nur eine Erbschaft der eleatischen Philosophie war.

3. Ich hatte früher einmal schon ausführlicher erörtert¹⁸⁷, daß die platonische Klassifikation der verschiedenen Arten des *Wissens* eigentlich eleatischen Ursprungs ist. Meine diesbezüglichen früheren Feststellungen lassen sich im folgenden zusammenfassen.

Wie bekannt, unterscheidet PLATON zwischen dem Reiche des Werdens, des sinnlich Wahrnehmbaren, des *όρατού* einerseits, und dem Reiche des Seienden,

¹⁸² JAMBЛИЧOS, Vita Pythagorica 89. Zur Erklärung der Stelle vgl. meinen Aufsatz, „Deiknymi, als math. Terminus für beweisen“ a. a. O. und A. FRENKIAN, MAIA, Nuova serie XI 1959 243—245.

¹⁸³ WAERDEN, B. L. V. D.: Math. Ann. 120, 1947/49, 127. — Nach dem ausdrücklichen Zeugnis des ARISTOTELES (Met., Buch A, Kap. 5) waren es die Pythagoreer, die sich als erste mit *μαθήματα* befaßten. Vgl. K. REIDEMEISTER, Das exakte Denken der Griechen, Hamburg 1949, 52.

¹⁸⁴ SNELL, B.: Die Ausdrücke für den Begriff des Wissens in der vorplat. Philosophie, Berlin 1924, 59—71; FRENKIAN, A.: Revue des Études Indoeuropéennes, Bucarest-Paris 1938, 468—474.

¹⁸⁵ PROCLUS (F) 48, 9ff.

¹⁸⁶ PLATON: Epinomis 990C—D.

¹⁸⁷ „Eleatica“ a. a. O. S. 98ff. (Kap. 4: „Zwischen Wissen und Nichtwissen“).

des *vonτόν* anderseits. Im Sinne dieser Zweiteilung wird im „Staat“¹⁸⁸ die folgende interessante Theorie über die drei Dinge: *Wissen*, *Nichtwissen* und *Meinen* entwickelt. Der Erkennende erkennt immer etwas (*ὅ γεγνώσκων γιγνώσκει τι*); das Ding aber „das erkannt wird, ist ein Seiendes (*ὄν*). Wie könnte auch etwas, das nicht ist, das Nichtseiende erkannt werden (*πῶς γάρ ἀν μή ὄν γε τι γνωσθεῖη*)? — Durch diese Worte wird also eine Doppelbeziehung hergestellt: das Erkennen, das *Wissen* bezieht sich auf das Seiende (*ἐπὶ μὲν τῷ ὄντι γνῶσις ἦν*), das *Nichtwissen* auf das Nichtseiende (*ἀγνῶσια δὲ ἐξ ἀνάγκης ἐπὶ μή ὄντι*), und dementsprechend wird jenes dritte Glied zwischen Wissen und Nichtwissen gesucht, das sich auf die Dinge bezieht, die zwischen Sein und Nichtsein ihre Stelle haben (*ἔτι δὲ τῷ μεταξὺ τούτῳ μεταξύ τι καὶ ζητητῶν ἀγνώσιας καὶ ἐπιστήμης*). Dieses dritte Glied zwischen Wissen und Nichtwissen wird in der *Meinung*, *δόξα*, gefunden, über die dann betont wird: sie wäre dunkler als das Wissen und heller als das Nichtwissen. — Nun es kann überhaupt kein Zweifel darüber bestehen, daß diese dreifache Unterscheidung bei PLATON — *Wissen*, *Nichtwissen* und *Meinen* — eleatischen Ursprungs ist. PARMENIDES sagte ja über seinen „zweiten Weg der Forschung“¹⁸⁹: „Dieser Weg, daß nämlich das Seiende nicht sei, und daß dies Nichtsein notwendig wäre — der ist, so künde ich dir, gänzlich unerforschbar. Denn das Nichtseiende kannst du weder erkennen (*οὐτέ γάρ δι γνοῦσης τό γε μή ἔστιν*) — es ist ja unausführbar — noch aussprechen“¹⁹⁰. PARMENIDES behauptet also, daß man das Nichtseiende gar nicht erkennen könnte; ja das Nichtseiende wäre auch undenkbar und unaussprechbar. Das Nichtseiende kann selbstverständlich auch nicht Gegenstand des *Wissens* sein. Man kann nur das Seiende erkennen oder wissen. — Das ist also der Ursprung des platonischen Gedankens: das *Wissen* beziehe sich immer auf das Seiende, und das *Nichtwissen* auf das Nichtseiende. — Es läßt sich ebenso leicht zeigen, daß auch die *Meinung* (*δόξα*) bei PARMENIDES dieselbe Rolle hatte, wie in der eben angedeuteten platonischen Rangordnung zwischen *Wissen* und *Nichtwissen*. Denn PARMENIDES schrieb ja von seinem „dritten Weg der Forschung“, d.h. über die Meinungen der Sterblichen (*βρότων δόξαι*): „Ich warne dich auch vor jenem Wege, auf dem da die nichtwissenden Sterblichen, die Doppelköpfe einherschwanken. Denn Ratlosigkeit lenkt den schwanken Sinn in ihrer Brust. So treiben sie hin stumm zugleich und blind, die Ratlosen, urteilslose Haufen, denen das Sein und Nichtsein (*τὸ πέλειν τε καὶ οὐκ εἰναι*) für dasselbe gilt und für nicht dasselbe“¹⁹¹. — Wie ich in einem anderen Zusammenhang nachweisen konnte¹⁹²: verwirft PARMENIDES die *δόξα* („Schein“, „Scheinwissen“, „Meinung“) darum, weil sie widerspruchsvoll ist. In dem Begriff des *δοκεῖν* steckt nämlich der Widerspruch des Seins und Nichtseins (*εἰναι καὶ οὐκ εἰναι*). — Ebenso bezieht auch PLATON das Meinen eben auf die Dinge, die ihre Stelle „zwischen Sein und Nichtsein“ haben¹⁹³, darum liegt die *Meinung* (*δόξα*) in der platonischen Rangordnung zwischen *Wissen* und *Nichtwissen*. — Ich glaube also gezeigt zu haben,

¹⁸⁸ Resp. V 476E—477B.

¹⁸⁹ Über die „drei Wege der Forschung“ des PARMENIDES s. Acta Ant. Acad. Scient. Hung. II. Budapest 1954, S. 54ff.

¹⁹⁰ DIELS-KRANZ: Vorsokratiker⁸ 28B fr. 2, 5—8.

¹⁹¹ Fr. 6, 4—9.

¹⁹² Siehe Acta Ant. Acad. Scient. Hung. II. Budapest 1954, 262—265.

¹⁹³ Resp. V 478D 5—9.

daß die erwähnte platonische Unterscheidung von *Wissen*, *Nichtwissen* und *Meinen* im Grunde gar nichts anderes als die Wiederholung der parmenideischen Ansicht über dieselben Dinge ist.

Nun mußte ich an diese frühere Erkenntnis von mir in diesem Zusammenhang deswegen erinnern, weil ich glaube, daß zwei wichtige Platon-Stellen über die *Geometrie* sich eigentlich nur im Lichte des eben Gesagten erklären lassen. — Es ist ja schon klar, wie das platonische „Meinen“ und „Wissen“ mit der Zweiteilung auf das Reich des sinnlich Wahrnehmbaren, des *όρατόν* einerseits, und auf das Reich des Seienden, des *νοητόν* andererseits zusammenhängt. Das Meinen, die widerspruchsvolle *δόξα* bezieht sich natürlich auf das sinnlich Wahrnehmbare, das *όρατόν*, auf das Reich des Werdens und Vergehens, während das Gebiet des wahren Wissens das Unsichtbare, das nur im Gedanken Erreichbare (*νοητόν*) ist; dieses letztere heißt in der parmenideisch-platonischen Terminologie: *das Seiende*. — Ich müßte hier eigentlich lange Zitate aus dem Dialog „Timaios“ griechisch anführen, damit man sehe, daß nicht nur der Grundgedanke, sondern selbst die platonische Terminologie *wörtlich* dieselbe ist, wie im Lehrgedicht des PARMENIDES. Statt dessen mögen hier einige Andeutungen genügen¹⁹⁴. Das, was nicht geworden und unvergänglich ist (*ἀγένητον καὶ ἀνώλεθρον*), das Unwandelbare, das gar nichts anderes in sich hereinnimmt, und auch selber nicht in etwas anderes hinübergeht (*οὐτε εἰς ἔαντὸν εἰσθεχόμενον ἄλλο ἄλλοθεν, οὐτε αὐτὸν εἰς ἄλλο ποι ἵνα*), das Unsichtbare und mit Sinnesorganen gar nicht faßbare (*ἀόρατον δὲ καὶ ἄλλως ἀνασθητον*), das wird nur im Gedanken erkannt (*ὅ δὴ νόησις εἴληχεν ἐπισκοπεῖν*); das andere dagegen, das Wahrnehmbare, das Gewordene und immer Wandelbare, das wird mit der Sinneswahrnehmung und mit der *δόξα* erfaßt (*δόξῃ μετ' αἰσθήσεως περιληπτόν*).

Die letzten Zitate sehen auf den ersten Anblick so aus, als sollten sie nur meine frühere Interpretation über die platonische Klassifikation („Wissen“, „Nichtwissen“ und „Meinen“) unterstützen bzw. illustrieren. Aber der vollständige Textzusammenhang, von dem ich die zitierten Worte heraushob, führt uns doch um einen wesentlichen Schritt weiter.

Denn PLATON spricht ja im „Timaios“ nicht von einer *Zweiteilung* auf das Reich des sinnlich Wahrnehmbaren (*όρατόν*) und auf dasjenige des nur Denkbaren (*νοητόν*); statt dessen erscheint hier eine *Dreiteilung*¹⁹⁵. Es wird nämlich neben den beiden eben genannten Reichen als *drittes* der „Raum“ genannt, der selber zwar ebenso unvergänglich ist, wie das ewig Seiende, das *νοητόν*, aber in dem doch jedes Bewegen, Entstehen und Vergehen stattfindet¹⁹⁶. Ja, es wird sogar hervorgehoben, daß auch die Erkenntnis, die sich auf dieses Dritte, den „Raum“ bezieht, weder dieselbe ist, womit man das wahrhaft Seiende erkennt, noch auch das bloße sinnliche Wahrnehmen, womit man die Dinge des Entstehens und Vergehens zur Kenntnis nimmt. Der *Raum* sei ohne sinnliche Wahrnehmungen, aber doch nur mit einem „Bastard-Wissen“ zu erfassen (*μετ' ἀνασθησίας*

¹⁹⁴ Die folgenden sind Zitate aus PLATONS „Timaios“ 52A—B.

¹⁹⁵ „Timaios“ 50C—D: *ἔν δὲ οὐν τῷ παρόντι χρὴ γένη διανοηθῆναι τρίτα, τὸμὲν γηγόμενον, τὸ δὲ ἐν φύγεται, τὸ δὲ ὅθεν ἀφομοιούμενον φύεται τὸ γηγόμενον.*

¹⁹⁶ Zu den Ausdrücken, mit denen der „Raum“ umschrieben wird, s. A. FRENKIAN, Le postulat chez Euclide etc. 25 sowie seinen Hinweis auf E. ZELLER, Die Philosophie der Griechen II 1, 4. Ausg. 1889, 722, Anm.

ἀπτὸν λογισμῷ τινι νόθῳ¹⁹⁷). Daß mit diesem „Bastard-Wissen“ über den Raum gerade die *Geometrie* gemeint wird, geht aus dem Vergleich mit einer anderen Stelle im „Staat“ eindeutig hervor¹⁹⁸. Hier wird die Erkenntnisart der Geometer als *διάνοια* bezeichnet, wobei ausdrücklich hervorgehoben wird, daß die *διάνοια* zwar höher als die bloße *δόξα*, d.h. die einfache Sinneswahrnehmung stünde, aber doch nicht auf dieselbe höchste Stufe zu setzen wäre, wie die rein intellektuelle Erkenntnisart des Verstandes, des *νοῦ*.

Nun glaube ich PLATONs Ausführungen über das „Bastard-Wissen“ der Geometrie historisch folgendermaßen erklären zu dürfen. Die Eleaten hatten ursprünglich die Existenz des Raumes rundweg geleugnet. Nachdem sie die Widersprüchlichkeit in allen Erscheinungen der Sinneswelt — also vor allem in den Begriffen: „Sich-Bewegen“, „Sich-Verändern“, „Entstehen“, „Vergehen“ usw. — nachgewiesen hatten, mußten sie auch jene beiden anderen Begriffe, die mit den vorigen untrennbar verbunden sind — nämlich die Begriffe „Zeit“ und „Raum“ —, für widersprüchlich erkennen. Die Erkenntnis, daß der Begriff „Bewegung“ widerspruchsvoll ist, führte zwangsläufig zu der Erkenntnis, daß auch der Begriff „Raum“ selber widerspruchsvoll sein muß. Da jedoch das Widerspruchsvolle undenkbar, „nichtseind“ ist, mußte auch die Existenz des „Raumes“ in Zweifel gezogen werden.

Diesen eben geschilderten Gedanken gegenüber vertritt jene andere Auffassung, die wir vorhin aus PLATON kennenlernten, eine *spätere*, oder allerdings *differenziertere* Entwicklungsstufe derselben Denkweise. Der „Raum“ wird nicht mehr ohne weiteres in die Reihe jener Dinge gestellt, die entstehen und vergehen, die nur Erscheinungen der Sinneswelt sind, und die also ihre Stelle zwischen Sein und Nichtsein haben; im Gegenteil, es wird jetzt aber betont: der „Raum“ ist ebenso unvergänglich (*φθορὰν οὐ προσδεχόμενον¹⁹⁹*) wie das „nur Denkbare“, das *νοητόν*, aber gleichzeitig ist er sozusagen die „Aufnahme-Stelle“ oder die „Amme“ des Entstehens²⁰⁰.

Aus dieser Doppelnatür des Dinges „Raum“ — daß er also von der einen Seite her gesehen ebenso unvergänglich (und unveränderlich) ist, wie das „nur Denkbare“, aber von der anderen Seite her doch mit der Welt des „Entstehens“, also mit den Dingen der sinnlichen Wahrnehmung untrennbar verbunden ist — wird auch verständlich, warum das Wissen von dem „Raum“, die Geometrie, ein „Bastard-Wissen“ heißt. — Noch genauer erklärt PLATON — mindestens in *einer* Beziehung —, wie man seine Bezeichnung der Geometrie als eines „Bastard-Wissens“ zu verstehen hat, indem er darüber redet, daß diese Wissenschaft — die Geometrie — gerade das Gegenteil von dem sei, was aus der Ausdrucksweise der Geometer hervorzugehen scheint²⁰¹. Denn es heißt: die Geometer gebrauchten ja lächerliche und gezwungene Ausdrücke, sie tätep nämlich so, als ob ihre Beschäftigung ein Handeln wäre, und als ob sie ihre Untersuchungen um gewisser Handlungen (Konstruktionen) willen anstellten. Sie redeten davon, daß die etwas *viereckig machten*, daß sie etwas über eine Linie *beschrieben*, etwas

¹⁹⁷ „Timaios“ 52B.

¹⁹⁸ Resp. VI 511D—E und VII 533E—534A.

¹⁹⁹ „Timaios“ 52A.

²⁰⁰ ὑποδοχὴ γενέσεως oder τιθήνη τῆς γενέσεως; s. auch Anm. 196.

²⁰¹ PLATON: Resp. VII 527A—B.

ansetzen usw. Und doch hätte diese ganze Wissenschaft zum Zweck die Erkenntnis ewiger Wesenheiten und nicht die Erkenntnis dessen, was einmal wird und ein ander Mal vergeht.

4. Ich glaube, daß jene Betrachtungen von PLATON über den „Raum“ und die „Geometrie“ — an die ich in dem vorigen Abschnitt diesmal nur andeutungsweise erinnern konnte — einigermaßen auch den Prozeß beleuchten, der zu der theoretischen Grundlegung der Geometrie führte. Man mußte nämlich in diesem Prozeß vor allem die Ansicht der Eleaten über den „Raum“ *revidieren*. Solange man den „Raum“ zusammen mit allen Erscheinungen der Sinneswelt verwarf, und solange man dies damit begründete, daß die Erscheinungen der Sinneswahrnehmungen und so auch der „Raum“ widerspruchsvoll sind, d.h. also, solange man die Existenz des Raumes „leugnete“, war natürlich gar keine Wissenschaft von dem Raum möglich. In dieser Zeit konnte die Geometrie nur als eine Art *ἰστορίη* gelten; d.h. sie galt als ein erfahrungsmäßiges Wissen, das man mit Hilfe der Sinneswahrnehmungen, hauptsächlich durch *Sehen* erhält. — Aber bald muß man entdeckt haben, daß im Falle des „Raumes“ doch auch eine interessante Abstraktion möglich ist. Denn wie kommt man eigentlich zu einem „Raumerlebnis“? Natürlich immer nur im Zusammenhang mit den Erscheinungen der Sinneswelt, d.h. im Zusammenhang mit den Dingen, die sich im Raum befinden, sich darin bewegen und verändern, entstehen und vergehen. Aber könnte man sich denn das Ding „Raum“ nicht auch ohne jene anderen Dinge denken, die darin vorhanden sind, d.h. also könnte man nicht den „Raum“ selbst unabhängig von den Erscheinungen der Sinneswelt betrachten? Wäre der so gedachte, rein abstrakte „Raum“ nicht schon etwas ähnliches, wie das „*nur Denkbare*“, das *νοητόν*?

Es scheint, daß die theoretische Begründung der Wissenschaft vom Raum, der Geometrie in der Tat wohl eben damit begonnen wurde, daß man zunächst versuchte eine Raumbetrachtung *ohne die Inanspruchnahme der sinnlichen Wahrnehmungen* auszubilden. PLATON selber sagt ja, daß der Raum „*ohne sinnliche Wahrnehmungen*“ (*μετ' ἀνασθητας*) mit einem „Bastard-Wissen“ (*λογισμῷ τινὶ ρόθῳ*) zu erkennen sei²⁰². War also früher das Wissen über den Raum eine Art *ἰστορίη*, so betonte man jetzt im Gegenteil, daß man den Raum selbst — d.h. also wohl den bloßen und rein abstrakten Raum ohne die darin befindlichen Gegenstände — eigentlich doch nicht mit der sinnlichen Wahrnehmung sondern eben *ohne* diese kennenzulernen müßte. — Wie man diesen Verzicht auf die sinnlichen Wahrnehmungen in der geometrischen Erkenntnis verwirklichen wollte, das ersieht man z.B. aus der Tatsache, daß in den Definitionen des I. Buches der euklidischen „Elemente“ die *Bewegung* möglichst vermieden wird²⁰³. Jene Definitionen der Linie oder der geraden Linie z.B., die uns aus PROKLOS schon bekannt sind — „ein Fließen des Punktes“ bzw. „ein gleichgerichtetes und unablenkbares Fließen des Punktes“ —, werden bei EUKLID mit solchen Formulierungen ersetzt, die den Begriff der „Bewegung“ umgehen. Überhaupt scheint die sog. „Bewegungsgeometrie“ — bis PLATONs Zeit einschließlich — verpönt gewesen zu sein²⁰⁴. Ja, man scheint sogar versucht zu haben, auch das bloß

²⁰² „Timaios“ 52B.

²⁰³ HOFMANN, J. E.: o. c. 32.

²⁰⁴ Vgl. A. D. STEELE, a. a. O. 308.

Anschauliche aus der Geometrie möglichst zu eliminieren. TH. HEATH glaubte z.B. die euklidische Definition der geraden Linie dahin erklären zu können, daß sie eigentlich einen Versuch darstellte, um eine Umschreibung des Begriffes *ohne Bezugnahme auf das Sehen* zu geben²⁰⁵.

Aber diese Versuche, die den Begriff „Raum“ hätten irgendwie in die Nähe des „nur Denkbaren“, des *vorπtov* rücken wollen, mußten im Grunde doch alle scheitern. Mit dem „Raum“ waren auch solche widerspruchsvolle Tatsachen gegeben, über die man mit den Grundsätzen der Eleaten keineswegs Herr werden konnte. Auf eine solche Tatsache habe ich in einem anderen Zusammenhang mit den Worten des PROKLOS einmal schon hingewiesen²⁰⁶.

Es entstand nämlich eine sehr große Schwierigkeit auch schon dadurch, daß nicht nur die Materie — d.h. also nicht nur die Dinge der Sinneswahrnehmung —, sondern auch der Raum selbst für das menschliche Denker als *unendlich teilbar* vorkam²⁰⁷. Infolgedessen mußte man auch zu der Ansicht kommen, daß es in dem Raum, d.h. also in der Geometrie gar kein „Kleinste“ gäbe. Wohl konnte man unter den Zahlen solche letzten und kleinsten Bestandteile — die bloß gedachten Einheiten — angeben, die als nicht weiter zerlegbar galten. Aber in der Geometrie fand man nichts ähnliches. Wie PROKLOS sagt: „in der Geometrie gibt es überhaupt gar kein *Kleinste* ..., und wo das Teilen in das Unendliche fortgesetzt werden kann, da ist auch das Irrationale (= das Sinnwidrige, *τὸ ἀλογόνον*) vorhanden“²⁰⁸. Leicht war es in der Arithmetik von der Eins und von den Zahlen auszugehen, denn diese waren als rein gedankliche Gebilde widerspruchsfrei und stofflos, aber in der Geometrie gab es keine solchen einfachen Anfänge. „Daß die Zahlen stoffloser als die geometrischen Größen, und daß die Grundlage der Zahlen (ihre *ἀρχή*) einfacher als diejenige der geometrischen Größen ist, leuchtet einem jeden ein“ — liest man wieder bei PROKLOS²⁰⁹. — Diese Schwierigkeiten waren schuld daran, daß selbst die allerersten Definitionen der euklidischen Geometrie, diejenigen des „Punktes“ und der „Linie“, nicht gelingen konnten. Man hätte nämlich im Sinne der Eleaten eben infolge der euklidischen Aussagen — „Punkt ist das, was keine Teile hat“ und „Linie ist eine Länge ohne Breite“ — den „Raum“ und damit zusammen auch die Geometrie leugnen müssen²¹⁰.

Die unendliche Teilbarkeit des Raumes war jedoch gar nicht die einzige Schwierigkeit, die man in der theoretischen Grundlegung der Geometrie irgendwie zu überwinden hatte. Mit dem Begriff „Raum“ — mag er auch noch so abstrakt gewesen sein — war unvermeidlich auch der andere widerspruchsvolle Begriff, die „Bewegung“ selber gegeben. Versuchte man das „Kleinste“ der Geometrie, den „Punkt“ zu finden, so brauchte man dazu das „unendliche Teilen“, was als etwas Widersinniges (*ἀλογόνον*) empfunden wurde. Versuchte man statt dessen von dem „Kleinsten“, dem „Punkt“ aus zu der „Linie“ zu kommen — wie man

²⁰⁵ HEATH, TH.: o. c. I p. 373.

²⁰⁶ Vgl. das Kap.: „Die Teilbarkeit und die Geometrie“ in meinem Aufsatz „Der älteste Versuch einer definitorisch-axiomatischen Grundlegung der Math.“, a. a. O.

²⁰⁷ Vgl. dazu dennoch A. A. FRAENKEL, Abstract Set Theory, Amsterdam 1953 p. 9, 10—13.

²⁰⁸ PROCLUS (F) 60, 11ff.

²⁰⁹ 95, 23ff.

²¹⁰ Siehe Anm. 206.

in der Arithmetik von der „Eins“ durch Vervielfältigung zu den „Zahlen“ kam²¹¹ —, so wurde dazu wieder die „Bewegung“ nötig. Ja, von dem Begriff „Raum“ waren auch gewisse praktische Tatsachen untrennbar, die man bloß mit den Sinnesorganen wahrnehmen konnte.

Ich glaube, daß wohl eben diese Schwierigkeiten die ersten griechischen Theoretiker veranlaßt haben mögen, eine sog. *axiomatische Grundlegung* — zunächst nur für die Geometrie — zu schaffen. Es mußten nämlich jene bloß empirischen Tatsachen zusammengestellt werden, ohne die man gar keine Wissenschaft von dem „Raum“, keine Geometrie hätte aufbauen können, die aber dennoch die Ansprüche der Eleaten auf reine, nur intellektuelle Erkenntnisweise keineswegs zu befriedigen vermochten. Nachdem man betonte, daß die Gebilde der Geometrie — „Linien“, „Strecken“, „Schnittpunkte“, „Winkel“, „Figuren“ usw. — mitnichten dieselben sind, die man auch sinnlich wahrnimmt (z.B. sieht²¹²), sondern daß diese ebensolche nur *gedachten* Dinge wären, wie die „Zahlen“, versuchte man in den geometrischen Definitionen jedes Element nur sinnlichen Ursprungs — z.B. das Anschauliche — möglichst zu vermeiden. — Um aber dann die allernötigsten geometrischen Konstruktionen doch zu ermöglichen, stellte man die ersten drei euklidischen *Postulate* auf (so wurde eine minimale Bewegung doch zugelassen); mit dem Namen *altr̄μata* verwies man immerhin noch darauf, daß man sich völlig im klaren darüber ist: die Zustimmung der Dialogpartner zu dieser Art von „Forderungen“ wird eigentlich in der Schwebe gelassen. — In einer anderen Gruppe von „Forderungen“ (*ἀξιώματα*) faßte man jene empirischen Aussagen über die „Gleichheit“ zusammen, die zu der Geometrie ebenso unerlässlich waren, deren Wahrheit man jedoch in der dialektischen Auseinandersetzung ebenso nicht hätte nachweisen können.

Das mag wohl der Ursprung der euklidischen Dreiteilung der mathematischen Prinzipien gewesen sein.

5. Es muß in diesem Zusammenhang noch eine Frage mindestens kurz berührt werden. Wie man sah, wurden in der späteren antiken mathematischen Terminologie weder die *ἀξιώματα* von den *altr̄μata*, noch diese beiden von den *ἐποθέσεις* scharf unterschieden. Diese drei Termini galten im allgemeinen als Synonyme voneinander. Ja, es gab außer diesen auch andere Ausdrücke noch für die Bezeichnung von unbewiesenen mathematischen Prinzipien. (Besonders lehrreich ist in dieser Beziehung der Wortgebrauch des ARCHIMEDES.) Es scheint also, daß die eben geprüfte dreifache Unterscheidung der mathematischen Prinzipien eigentlich *nur* für EUKLID gültig ist. Wie konnte man diese merkwürdige Tatsache historisch erklären?

Ich glaube, man darf in der Erklärung von der schon öfters zitierten Platon-Stelle — Resp. VI 510C—D — ausgehen. Hier heißt es nämlich, daß die Mathematiker gewisse Voraussetzungen ihren Untersuchungen zugrunde legten, aber daß sich dieselben Mathematiker gar nicht bemühten, sich oder anderen über die zugrunde gelegten Voraussetzungen genauer Rechenschaft zu geben, da diese ja — nach ihrer Meinung — einem jeden klar wären. Derselbe PLATON also, der

²¹¹ Vgl. die Kap. 3 und 4 in meiner Arbeit: „Der älteste Versuch einer definitorisch-axiomatischen Grundlegung der Math.“ a. a. O.

²¹² PLATON: Resp. VI 510D.

die mathematische Denkweise in der Beweisführung für vorbildlich hielt, warf den Mathematikern eine gewisse „Gleichgültigkeit“ gegenüber den Prinzipien ihrer Wissenschaft vor. Gerade darum dachte er, daß die Prüfung dieser Prinzipien auch nicht mehr der Mathematik, sondern einer schon höher stehenden Wissenschaft, der „Dialektik“ als Aufgabe zufiele. (Derselben Ansicht war übrigens später auch ARISTOTELES²¹³.)

Nun glaube ich ein Zeichen dieser von PLATON erwähnten „Gleichgültigkeit“ der Mathematiker auch im folgenden erblicken zu dürfen. Es ist, wie bekannt, schon P. TANNERY aufgefallen, daß in dem ältesten vollständig erhaltenen Werk der griechischen Mathematik, in der Schrift des AUTOLYKOS von Pitane („De sphaera quae movetur“) gar kein Unterschied zwischen den Definitionen und dem Postulat gemacht worden sei²¹⁴. Dieselbe Beobachtung konnte ich zuletzt dahin korrigieren, daß die unbewiesenen Sätze (die Prinzipien) in den Handschriften dem Werk des AUTOLYKOS ohne jede Benennung vorausgeschickt waren²¹⁵. Es scheint also, daß man auch schon in der Zeit des AUTOLYKOS *gar nicht mehr nötig fand* die einzelnen Arten von mathematischen Prinzipien streng voneinander zu unterscheiden. Im besten Einklang steht mit dieser Beobachtung auch die andere Tatsache, daß nämlich auch die Mathematiker der späteren (posteuclidischen) Zeit gar keinen Wert mehr auf die genaue Unterscheidung der verschiedenartigen mathematischen Prinzipien legten. Entscheidend wichtig war für die Mathematik nur *eine* Unterscheidung, daß es nämlich unbewiesene Anfangssätze einerseits, und abgeleitete Theoreme (bzw. Aufgaben) andererseits gibt. Die nähere Untersuchung der Anfangssätze überließ die wahrhaft fruchtbare Mathematik gern der weniger fruchtbaren philosophischen Spekulation. Dieses Verfahren war also wohl auch ein Zeichen dessen, wie sehr sich die Mathematik von der Philosophie schon unabhängig machte.

Man sieht also, daß die griechischen Mathematiker — mindestens diejenigen, die uns unmittelbar zugänglich sind — weder in der Zeit vor EUKLID, noch in der späteren (posteuclidischen) Zeit eine strenge Unterscheidung der mathematischen Prinzipien durchführten. Demnach könnte also die Tatsache, daß die behandelte Unterscheidung bei EUKLID dennoch vorhanden ist, zunächst den Gedanken nahelegen, daß *diese Unterscheidung eventuell von Euklid selbst stammte*. — Gegen diese Vermutung sprechen jedoch zwei Tatsachen.

1. ARISTOTELES behandelte mehrmals in seinen Schriften die Prinzipien der beweisenden Wissenschaften, ja er versuchte auch die verschiedenen Eigenschaften festzustellen, die diese Prinzipien haben müßten. — Man ersieht aus dieser Bestrebung von ihm, daß man irgendeine Unterscheidung der mathematischen Prinzipien auch schon in der voreuklidischen Zeit versucht haben muß.

²¹³ Vgl. die beiden Stellen: PLATON, Resp. VI 510c—517d und ARISTOTELES, Met. 3 1005 a 19ff. — Der einzige Unterschied dieser Platon- und Aristoteles-Stellen besteht darin, daß PLATON über *τὸν θέσεις*, während ARISTOTELES über *ἀξύματα* spricht; die beiden Termini heißen natürlich ein und dasselbe.

²¹⁴ AUTOLYCI, De sphaera quae movetur liber. De ortibus et occasibus libri duo, ed. FR. HULTSCH, Lipsiae 1885. Index s. *ὅποι*; vgl. P. TANNERY, Mém. Scient. II 58.

²¹⁵ In der Ausgabe von FR. HULTSCH steht vor beiden Werken des AUTOLYKOS als Titel der Voraussetzungen: *ὅποι*; aber man erfährt beide Male aus dem apparatus criticus: „add. Da“ = addidit DASYPODIUS. Es ist also nur eine ziemlich willkürliche Zutat des alten Herausgebers, C. DASYPODIUS (= RAUCHFUSS, 1572).

2. Es ist oben erwähnt worden, daß aller Wahrscheinlichkeit nach schon OINOPIDES im 5. Jahrhundert die ersten drei euklidischen Postulate kannte und bewußt verwendete; ja er mag sogar der Urheber dieser Postulate gewesen sein. — Es wäre demnach denkbar, daß diese Art Prinzipien — die Postulate — seit OINOPIDES immer in einer Sondergruppe den mathematischen Elementarbüchern vorausgeschickt wurden.

Darum möchte ich EUKLIDS dreifache Unterscheidung der Prinzipien als eine Art Tradition auffassen. Ich meine, man wollte wohl nur damals die verschiedenen Arten von Anfangssätzen (*δρολογήματα*, *ἐποθέσεις*, *ὅροι*, *αἰτήματα*, *ἀξιώματα* etc.) ernstlich und genauer voneinander unterscheiden, als man die allerersten Versuche anstellte, die Mathematik von der eleatischen Philosophie abzugrenzen, also im Laufe der Grundlegung der Arithmetik und dann noch mehr im Laufe der Grundlegung der Geometrie. Zu dieser Zeit mag es wohl noch wichtig gewesen sein, zu wissen, welchem eleatischen Dogma gegenüber die einzelnen Gruppen der unbewiesenen Anfangssätze, die *αἰτήματα* und die *ἀξιώματα*, Stellung nehmen. Später jedoch, als die eleatische Philosophie nicht mehr aktuell empfunden wurde, hatte auch die frühere Unterscheidung der einzelnen Arten kaum mehr einen wichtigen Sinn. Deswegen konnten die post-euklidischen Mathematiker die einzelnen Ausdrücke für die unbewiesenen Prinzipien schon als bloße Synonyme voneinander benutzen. — Bei EUKLID wäre also die Unterscheidung der Prinzipien nur noch eine zu seiner Zeit schon überholte Tradition; er mag diese Unterscheidung von einem jener seiner Vorgänger übernommen haben, die auch schon vor ihm längst „Elemente“ zusammstellten; solche waren, wie bekannt, HIPPOKRATES von Chios, LEON und THEUDIOS von Magnesia.²¹⁶

Damit könnte man auch erklären, warum die „Theorien“ des ARISTOTELES über das Wesen der mathematischen Axiomatik für die historische Forschung im Grunde doch so wenig brauchbar sind. Jener ARISTOTELES, der schon so wenig Verständnis für die Eleaten hatte, daß er die genialen Paradoxe des ZENON für bloße Sophismen erklärte, konnte nur seine eigenen Gedanken über das Wesen der mathematischen Axiomatik darstellen, aber eine kongeniale oder eine historische Erklärung für dasselbe war von ihm gar nicht mehr zu erwarten.

V. Probleme der frühgriechischen Mathematik in neuer Beleuchtung

In den vorigen Kapiteln habe ich eine solche Erklärung für das Entstehen der ersten mathematischen Axiomatik versucht, die wohl auch noch andere historischen Probleme der frühgriechischen Mathematik in ein neues Licht zu stellen vermag. Ohne daß ich diese anderen Probleme schon in diesem Zusammenhang ausführlicher erörtern wollte, möchte ich auf einige diesmal nur kürzlich hinweisen.

1. Eine wichtige Frage der antiken Mathematikgeschichte hieße z.B.: wie ist die mathematische Existenz in der Antike einmal überhaupt zum Problem geworden? — Soweit ich sehe, hat man diese Frage in der Fachliteratur bisher eigentlich noch nie prägnant genug gestellt. Anstatt dessen ging man von solchen

²¹⁶ PROCLUS (F) 66, 7—8; 66, 20—23 und 67, 12—16.

Halbwahrheiten aus, die lange Zeit hindurch allerdings verschleiern konnten, was für ein historisches Problem hier überhaupt vorliegt.

Es wird, wie bekannt, im allgemeinen H. G. ZEUTHEN als bleibendes Verdienst angerechnet, daß er die Prinzipien des *Existenzbeweises* bei den Alten aufgeklärt hätte²¹⁷. O. BECKER schrieb z.B. folgendes darüber²¹⁸: „Nach seinen (=ZEUTHENS) Forschungen dient als alleiniges und stets angewandtes Mittel für den Existenzbeweis die *Konstruktion*. Und zwar, da die antike Mathematik nur Geometrie ist (auch die Arithmetik und Algebra erscheint in geometrischem Gewand), Konstruktion von *Figuren*. Als Grundlage dienen dabei zwei Fundamentalkonstruktionen: Die Verbindung zweier gegebener Punkte durch eine Gerade und das Schlagen eines Kreises um einen gegebenen Punkt mit gegebenem Radius. Daß diese Konstruktionen möglich sind oder, was dasselbe bedeutet, daß die durch sie gelieferten Figuren existieren, ist der Inhalt zweier Postulate des EUKLID usw. usw.“

Mögen zwar die einzelnen Behauptungen in diesem Zitat auf den ersten Anblick auch noch so überzeugend und einleuchtend vorkommen, so glaube ich dennoch auf eine wesentliche Schwäche der ganzen Konzeption hinweisen zu müssen. Denn wohl ist zwar die griechische Mathematik vorwiegend Geometrie, und in der Tat wurden auch Arithmetik und Algebra bei den Griechen nachträglich „geometrisiert“, sie erscheinen tatsächlich in geometrischem Gewand²¹⁹. Aber ob auch in der Arithmetik das Mittel für den Existenzbeweis wirklich immer die *Konstruktion* war, wie man es im Sinne des vorigen Zitates denken sollte? Ja, man müßte sogar dieselbe Frage eigentlich noch schärfer formulieren, damit die Schwäche der Zeuthenschen Konzeption noch eindeutiger hervortrete: ob auch in der Arithmetik als alleiniges und stets angewandtes Mittel für den Existenzbeweis eben die „Konstruktion von *Figuren*“ galt? — Ich glaube, es genügt diese Frage zu formulieren, und sofort wird ein jeder einsehen müssen, daß die Theorie von ZEUTHEN irgendwie doch nicht völlig richtig sein kann. Da sind z.B. zwei interessante Sätze der euklidischen Arithmetik: VII 31. *Jede zusammengesetzte Zahl wird von einer Primzahl gemessen* und IX 20. *Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgelegte (=endliche) Menge von Primzahlen*. — Zweifellos sind die Beweise, die man für diese Sätze liefern kann, im Grunde *Existenzbeweise*. Denn es soll ja im ersten Fall für jede beliebige zusammengesetzte Zahl, z.B. a , die Existenz einer solchen Primzahl (z.B. f oder g) nachgewiesen werden, die Teiler von a ist. — Ebenso hat man zum Beweis des anderen Satzes zu zeigen, daß keine vorgelegte endliche Menge von Primzahlen alle Primzahlen enthält; es existiert also mindestens noch eine Primzahl außerhalb jeder vorgelegten endlichen Menge von Primzahlen, wie man auch die endliche Menge von Primzahlen zusammenstellen möge.

Nun haben aber die Beweise, die man für die vorigen Sätze bei EUKLID liest, mit *geometrischer* Konstruktion gar nichts zu tun. (Es fragt sich überhaupt, ob es nicht nur ein Hineininterpretieren unserer eigenen Denkweise wäre, wenn wir die euklidischen Beweise für die obigen beiden Sätze als „Konstruktionen“ in irgendwelchem anderen Sinne bezeichneten!) Wollte man also an ZEUTHENS

²¹⁷ ZEUTHEN, H. G.: Math. Ann. 47, 1896, 222—228.

²¹⁸ BECKER, O.: Math. Existenz, 1927, 130.

²¹⁹ Vgl. O. NEUGEBAUER, Quellen u. Studien etc. B 3 (1936) 245—259.

These — daß nämlich bei den Griechen das alleinige und stets angewandte Mittel für den Existenzbeweis die *Konstruktion* war — dennoch festhalten, so dürfte man allerdings den Begriff der „Konstruktion“ selbst *nicht* auf die Geometrie beschränken. Ja, dann müßte man denselben Begriff („Konstruktion“) so sehr erweitern, daß es gar nicht mehr dem Sinne des vorigen Zitates entspräche.

Auf andere Schwächen der Theorie von ZEUTHEN hat A. FRAJESE hingewiesen²²⁰. Von seinen Bedenken möge hier besonders das folgende hervorgehoben werden. EUKLID war nach der einstimmigen Ansicht — sowohl der antiken Überlieferung²²¹ als auch der modernen Forschung im allgemeinen²²² — ein „Platoniker“. Wie ist es aber möglich, daß ein Platoniker gedacht hätte: die geometrische Konstruktion könnte als Existenzbeweis gelten? Das wäre allerdings ein völlig unplatonischer Gedanke gewesen²²³, denn schließlich ist ja die geometrische Konstruktion doch ein Operieren in dem Bereiche des Sichtbaren und Tastbaren, und PLATON verstand unter „Existenz“ etwas völlig anderes. — Diese Bemerkung von A. FRAJESE trifft zweifellos etwas sehr wesentliches.

Nun wird man im Sinne der vorigen Untersuchungen das historische Problem der mathematischen Existenz allerdings etwas anders beleuchten können, als es bisher überhaupt möglich war. — Denn es besteht ja gar kein Zweifel darüber, in welchem Sinne die *Existenz* in der eleatischen Philosophie — und auch in ihrer Fortsetzung, in der platonischen beurteilt wurde. Daß das Seiende ($\tau\delta\ \sigma\nu$) — oder mit anderem Namen die Eins ($\tau\delta\ \epsilon\nu$) — existiert, war für die Eleaten gar keine Frage. Aber anstatt den Satz „das Seiende ist“ zu beweisen — d.h. also, anstatt eines direkten Existenzbeweises für das Seiende — begnügte sich PARMENIDES mit je einem indirekten Beweis. Er hatte nämlich gezeigt, daß die Sätze „das Seiende ist *nicht*“ oder „das Seiende ist *und ist auch nicht*“ widerspruchsvoll sind, und darum nicht wahr sein können. Mit dem Nachweis des Widerspruches in diesen letzteren Sätzen galt für ihn die Existenz des Seienden schon als erwiesen.

Ähnlich war der Existenzbeweis auch in der Arithmetik, nur daß hier zuerst noch der Begriff des „*abstrakt* Vielen“, d.h. der Begriff der „Zahl“ in der Weise geschaffen werden mußte, daß man die *Eins* im Gedanken vervielfältigte²²⁴. (Die Eleaten hatten ja ursprünglich die Existenz der Vielheit geleugnet, und solange es keine Vielheit gibt, ist natürlich auch gar keine Arithmetik möglich.) Man stellte also die arithmetische Definition auf: „Zahl ist die aus Einheiten zusammengesetzte Menge.“ Durch diese Definition glaubte man eine feste Grundlage für die ganze Arithmetik geschaffen zu haben, und darum konnte als Kriterium für die Existenz in der Arithmetik ein ähnlicher indirekter Beweis wie derjenige bei PARMENIDES gelten.

Es wird also in der griechischen Arithmetik die Existenz irgendeines rein arithmetischen Gebildes *nicht* durch Konstruktion bewiesen, sondern dadurch, daß man die Widersprüchlichkeit jener Behauptung nachweist, die die Existenz

²²⁰ FRAJESE, A.: *La matematica nel mondo antico*, Roma 1951 p. 92.

²²¹ PROCLUS (F) 68, 20ff.

²²² FRAJESE, A. (o. c. 95) verweist nur beispielsweise auf U. V. WILAMOWITZ-MOELLENDORFF, *Platon*³, Berlin 1929, 754 und E. SACHS, *Die fünf platonischen Körper*, Berlin 1917, 159.

²²³ O. c. 95.

²²⁴ Vgl. die Kap. 3 und 4 in meiner Arbeit: „Der älteste Versuch einer definitorisch-axiomatischen Grundlegung der Math.“, a. a. O.

des betreffenden Gebildes bestreitet. Es muß z.B. im Sinne des Satzes *Elem. VII 31.* für jede zusammengesetzte Zahl eine solche Primzahl existieren, die Teiler von dieser zusammengesetzten Zahl ist, weil die gegenteilige Behauptung zum Widerspruch führt. Durch den Nachweis des Widersprüches in dieser gegenteiligen Behauptung gilt die Existenz der gesuchten Primzahl als indirekt erwiesen. — Ebenso muß im Sinne des anderen Satzes (*Elem. IX 20.*) außerhalb jeder vorgelegten Menge von Primzahlen mindestens noch eine Primzahl existieren, weil die gegenteilige Behauptung — ähnlich wie im vorigen Fall — zu einem Widerspruch führt.

Die Behauptung also, daß in der griechischen Mathematik das alleinige und stets angewandte Mittel für den Existenzbeweis die *Konstruktion* gewesen wäre, gilt für die Arithmetik *nicht*. Der Existenzbeweis wurde in der reinen — und auch in der nur oberflächlich geometrisierten Arithmetik (nur oberflächlich geometrisiert ist z.B. die Arithmetik im VII. Buch der euklidischen „Elemente“) rein logisch, auf indirektem Wege geführt.

Aber einen anderen Sinn bekam das Problem der mathematischen Existenz in der Geometrie, d.h. in der Wissenschaft vom Raum. Denn im Sinne derselben Methode hätte man hier schon die Existenz des Punktes und der Linie, ja auch die Existenz des Raumes selbst leugnen müssen. Man mußte in der Geometrie unumgänglich von praktisch-empirischen Tatsachen ausgehen. Deswegen mußte in der Geometrie auch der Existenzbeweis auf etwas praktisch-empirisches, auf die Konstruktion gebaut werden.

Es scheint also, daß H.G. ZEUTHEN insofern recht hatte: in der Geometrie war ein wichtiger — ja vielleicht gerade das wichtigste Mittel für den Existenzbeweis die Konstruktion. Man ging dabei in der Tat von zwei Fundamentalkonstruktionen als von Existenzforderungen aus; das waren die beiden euklidischen Postulate, 1. und 3.: die Verbindung zweier gegebener Punkte durch eine Gerade und das Schlagen eines Kreises um einen gegebenen Punkt mit gegebenem Radius.

Natürlich blieb dabei für die spekulative Philosophie immer noch fraglich: ob die so zustandegebrachten Figuren in der Tat auch „existieren“, und ob ihre Existenz nicht nur ein „Schein“ oder eine bloße „Meinung“ wäre. (Beide Worte — „Schein“ und „Meinung“ — heißen im griechischen gleichermaßen: *δόξα*.) Die Existenz der konstruktiv hergestellten geometrischen Figuren ist ja „widerspruchsvoll“, denn das Sichtbare und sinnlich Wahrnehmbare, das außerdem auch noch das Ergebnis einer Bewegung darstellt, also entstanden ist, gilt für die eleatisch-platonische Philosophie als widerspruchsvoll, als etwas „zwischen Sein und Nichtsein“ — wie die *δόξα* („Meinung“) zwischen Wissen und Nichtwissen. — Aber in jener theoretischen Geometrie, die sich von der eleatischen Philosophie fortschreitend immer mehr und mehr unabhängig machte, scheint man kein besonderes Gewicht mehr auf die bloß philosophische Frage der Existenz jener Gebilde gelegt zu haben, die man konstruktiv herstellen konnte.

[Eine weitere Frage, die in diesem Zusammenhang mindestens noch aufgeworfen werden soll: ob in der Tat die ersten drei euklidischen Postulate zu einer Zeit eine solche besondere Bedeutung besaßen, wie man diesen vielfach zuschreiben will? Wie bekannt, schrieb O. BECKER zuletzt: „in der platonischen Schule scheint sich die Beschränkung auf Lineal und Zirkel überall da, wo sie möglich

war, durchgesetzt zu haben, während zuvor von der Einschiebung (*πενσίς*) ein beliebiger Gebrauch gemacht wurde²²⁵“. Warum wollten sich die Platoniker bloß an die ersten drei Postulate halten — wenn sie es wirklich taten —, schließlich entstammen ja diese nach der obigen Vermutung doch aus einer viel früheren Zeit, noch von OINOPIDES im 5. Jahrhundert?]

2. Eine andere interessante Frage der griechischen Mathematikgeschichte, die im Sinne meiner vorangestellten Untersuchungen anders beurteilt werden soll, als es bisher geschah, betrifft das gegenseitige historische Verhältnis der platonischen Philosophie einerseits, und der griechischen Mathematik andererseits. Es wird sich lohnen, mindestens kurz daran zu erinnern, wie man diese Frage früher behandelte.

Noch im Jahre 1913 veröffentlichte H. G. ZEUTHEN einen wichtigen Aufsatz, der uns hier eigentlich nur wegen seinem Titel interessiert; er heißt nämlich: „Sur les connaissances géométriques des Grecs avant la réforme platonicienne²²⁶.“ Wie man es aus dem Titel ersieht: es soll nach ZEUTHEN im Laufe der Geschichte der griechischen Geometrie eine sog. „platonische Reform“ gegeben haben, ja, der Aufsatz wollte diese Reform PLATON selber zuschreiben. ZEUTHEN war nämlich der Ansicht, daß PLATON — wenn auch nicht unmittelbar, so doch durch seine Schüler — eine sehr wesentliche Wandlung in der Geometrie hervorgerufen hätte. — Zwölf Jahre später faßte O. TOEPLITZ folgendermaßen zusammen, wie die meisten Historiker — im Banne der merkwürdigen „Reform-Theorie“ von ZEUTHEN — PLATONS Verhältnis zu der Mathematik beurteilten²²⁷:

„PLATON hat natürlich keine mathematischen Entdeckungen gemacht; die Überlieferung, die ihm das Dodekaeder zuschreibt, ist wegzulegen; aber Platon hat der Mathematik die allgemeinen Direktiven gegeben; die axiomatische Struktur der „Elemente“, die Beschränkung auf Konstruktionen mit Zirkel und Lineal, die analytische Methode sind Platons Werk; die großen Mathematiker seines Kreises, Theaitetos und Eudoxos, haben die sog. euklidische Mathematik unter seinem Einfluß geschaffen.“

Die hervorgehobenen Sätze des Zitates zeigen, wie man geneigt gewesen wäre, die ganze deduktive und systematische Mathematik der Griechen bis auf EUKLID einschließlich samt und sonders jener „platonischen Reform“ zuzuschreiben, die ZEUTHEN wie einen Meilenstein in der Geschichte der antiken Wissenschaft auffassen wollte. In der Tat bezeichnete auch O. BECKER noch im Jahre 1927 — unter ausdrücklichem Hinweis auf ZEUTHEN — PLATONS Tätigkeit als den Anfang einer neuen Epoche in der Geschichte der mathematischen Wissenschaft. Er schrieb darüber folgendes²²⁸:

„Im großen betrachtet, kann man sagen: Die Mathematik vor PLATON war noch an das Anschaulich-Gestalthafte gebunden („Wahrnehmungsgeometrie“,

²²⁵ BECKER, O.: Das math. Denken der Antike 20.

²²⁶ Oversigt det kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger, 1913, No. 6, 431—473.

²²⁷ „Mathematik und Antike“, Die Antike (Zeitschr.) 1925 I, 175—203. Das Zitat im Text (von S. 201) wurde durch O. TOEPLITZ mit den Worten eingeführt: „Die traditionelle Platonauffassung, wie sie auch von den beteiligten Mathematikern im wesentlichen geteilt wird.“

²²⁸ Math. Existenz 250.

ZEUTHEN). Auffallende (symmetrische und dgl.) Figuren wurden auf ihre Eigentümlichkeiten hin untersucht, ohne daß diese Untersuchungen einen einheitlichen Zusammenhang gehabt hätten. Auch die ‚Konstruktionen‘ waren willkürlich und nicht von strengen Regeln beherrscht („Einschiebung“, allerlei kinematische Konstruktionen, wie etwa bei der Quadratrix des HIPPPIAS von Elis). *Platon führte erst die durchgreifende Reform durch, die uns die axiomatische Methode und die Definition der mathematischen Existenz durch Konstruktion schenkte.“*

ZEUTHENs Auffassung über die „platonische Reform“ hat sich in den vergangenen Jahrzehnten so sehr eingewurzelt, ist eine so festsitzende „communis opinio“ geworden, daß daneben kaum eine von ihr abweichende Meinung auftreten konnte. Sehr bezeichnend war dafür auch der Fall von O. TOEPLITZ. Er wollte nämlich die Zeuthensche Theorie auf Grund des folgenden Gedankenganges einer kleineren Revision unterziehen:

Gab es wirklich eine so durchgreifende „platonische Reform“ in der Geschichte der Wissenschaft, wie **ZEUTHEN** es meinte, so kann man in der Entwicklung der griechischen Geometrie zwei Stufen unterscheiden: eine empirische *vor* der Reform, und eine theoretische *nach* derselben. „Indessen kann man — schrieb weiterhin **TOEPLITZ** — zwischen diesen beiden Stufen noch eine dritte einschieben, eine Stufe, auf der zwar schon Beweise geführt werden, wo aber noch nicht systematisch gefragt wird, was das äußerste Minimum an unbeweisbaren Axiomen ist, mit dem man auskommt. Daß eine solche Stufe denkbar ist, zeigt der Mathematikunterricht vieler Schulen²²⁹“

Die Einschiebung der vorgeschlagenen „dritten Stufe“ würde natürlich die Bedeutung der angeblichen „platonischen Reform“ schon wesentlich beeinträchtigen, bzw. vermindern. Da knüpfte sich der andere Revisionsversuch von **TOEPLITZ** an:

„Es ist eine mögliche Auffassung, daß die großen Mathematiker, auch die der Akademie, diesen Prozeß *nicht aus einer Anregung Platons, sondern aus dem inneren Wesen des Mathematischen heraus vollziehen, und daß Platon es ist, der von ihnen lernt und das Prinzip ihres Vorgehens für die allgemeine Erkenntnislehre auswertet*²³⁰.“

Dieser Revisionsversuch der Zeuthenschen Theorie wurde durch O. BECKER ziemlich kühl abgelehnt; er bemerkte nämlich auf die eben zitierten Gedanken von **TOEPLITZ**:

„Diese Hypothese läßt sich bei den wenigen uns bekannten Urkunden aus der Zeit weder beweisen noch widerlegen. Soviel wird man aber doch wohl als sicher annehmen können, daß *Platon als erster das klare Bewußtsein des streng methodischen Verfahrens des Elementaraufbaues gewonnen hat und dadurch auch die Entwicklung der positiven mathematischen Forschung entscheidend gefördert hat*²³¹.“

Es darf uns eigentlich nicht wundernehmen, daß O. BECKER im Jahre 1927 noch so sehr den Mangel an Urkunden aus der vorplatonischen Zeit betonte, als wäre dieser Mangel ein unüberwindliches Hindernis, um die griechische Mathematik der vorplatonischen Zeit näher kennenzulernen. Er selber hat ja erst

²²⁹ O. c. 201.

²³⁰ Ebd. 201—202.

²³¹ Math. Existenz 250 Anm. 2.

einige Jahre später die sog. Lehre vom Geraden und Ungeraden — das älteste deduktive Lehrstück der Griechen wohl noch aus der ersten Hälfte des 5. Jahrhunderts²³² — in der ursprünglichen Gestalt rekonstruiert. Um so überraschender ist jedoch, daß O. BECKER seinen Glauben an ZEUTHENS Offenbarung über die angebliche „platonische Reform“ der Mathematik scheinbar auch später nicht völlig aufgab. Denn er bemerkte auch noch im Jahre 1951 zu jener Vermutung B. L. v. d. WAERDEN^s, daß das VII. Buch der euklidischen „Elemente“ noch aus dem 5. Jahrhundert v. u. Z. entstammt: „die vollendete Form von 7 könnte durch eine spätere Überarbeitung, etwa durch die Mathematiker der Akademie zustande gekommen sein²³³.“ — Kein Zweifel, auch O. BECKER wußte genau, wie wenig diese Skepsis begründet ist; er fügte auch gleich hinzu: „Indessen macht der Verfasser (=B. L. v. d. WAERDEN) dagegen das gewichtige Argument geltend, daß bei einer streng logischen Untersuchung, wie sie die Begründung der Zahlenlehre in 7 darstellt, eine Unterscheidung von Inhalt und Form untnlich ist.“ Die vorige Vermutung über die etwaige Überarbeitung des VII. Buches der „Elemente“ — durch die Mathematiker der Akademie — zeugt also eigentlich nur davon, daß O. BECKER den alten Gedanken von ZEUTHEN — die Mathematik hätte unter PLATONs Einfluß irgendeine wesentliche Wandlung durchgemacht — nicht gern aufgeben wollte.

Nun brauche ich nach meinen vorigen Untersuchungen wohl nicht mehr ausführlicher zu erörtern, was ich von der angeblichen „platonischen Reform“ der Mathematik halte. Aber es wird dennoch interessant, mindestens den Ursprung dieser überholten Ansicht einigermaßen zu beleuchten.

Es werden in der Tat in der antiken Überlieferung PLATONs enge Beziehungen zu der Mathematik seiner Zeit immer wieder hervorgehoben. PROKLOS schreibt z. B. folgendes darüber²³⁴: „PLATONs eifrigem Studium ist es zu verdanken, daß die anderen mathematischen Wissenszweige und besonders die Geometrie den größten Aufschwung nahmen. Er hat ersichtlich seine Schriften mit mathematischem Gedankengut ganz und gar durchsetzt und geht allenthalben darauf aus, in den Philosophiebeflissen den Staunen über diese Dinge hervorzurufen.“ — Rechnet man außerdem noch hinzu, daß auch die großen Mathematiker dieser Zeit, THEAITETOS, EUOXOS und noch viele andere, die bei PROKLOS aufgezählt werden, PLATONs Freunde, bzw. seine Lehrer in der Mathematik oder seine Schüler in der Philosophie waren, so wird man natürlich keineswegs leugnen wollen, daß PLATONs Gestalt und Tätigkeit wohl auch für die Mathematik bedeutend gewesen sein möchte. (Auch ich selber habe ja meine Theorie über den Ursprung der deduktiven Mathematik nur unter ständiger Benutzung von PLATONs Schriften und Zeugnissen aufbauen können.)

Aber wo gibt es denn auch nur einen einzigen Beleg dafür, daß PLATON wirklich auch eine *Reform* — wie man sagt sogar: eine *durchgreifende Reform* in der Mathematik veranlaßt hätte? — Soweit ich sehe, könnte man diesen Gedanken mit gar keinem konkreten Zeugnis unterstützen. Die Behauptung, daß „PLATON

²³² Quellen u. Studien etc. B3 (1936) 533—553. Vgl. auch O. BECKER, Grundlagen der Mathematik 1954, 38ff.

²³³ *Gnomon* 23, 1951, 299.

²³⁴ PROCLUS (F) 66, 8ff.

als erster das klare Bewußtsein des streng methodischen Verfahrens des Elementaraufbaues gewonnen hätte, und daß er dadurch auch die Entwicklung der positiven mathematischen Forschung entscheidend gefördert hätte“, scheint mir eine näher nicht begründete, ja ziemlich willkürliche moderne Vermutung zu sein. — Ja wollte man sogar PLATONS Beziehungen zu der Mathematik ohne Rücksicht auf meine oben entwickelte Theorie beurteilen — daß nämlich sowohl die platonische Dialektik, als auch die Methode der fröhgriechischen Mathematik *auf einen gemeinsamen Ursprung*, auf die Philosophie der Eleaten zurückgehen —, auch dann müßte man eher zu einer solchen Ansicht kommen, wie diejenige von K. REIDEMEISTER²³⁵, daß nämlich die indirekte Beweismethode, das wichtigste Werkzeug der platonischen Dialektik, aus der Mathematik entstammt²³⁶.

Aber wie konnte man in einer Zeit doch auf den Gedanken verfallen, daß PLATON eine „durchgreifende Reform“ in der griechischen Mathematik veranlaßt hätte, wo sich kaum ein konkreter Beleg für diese Vermutung anführen läßt? (Die oben zitierten Worte des PROKLOS von „PLATONS eifrigem Studium“ und von dem gleichzeitigen „Aufschwung der Mathematik“ sind gewiß zutreffend, aber sie besagen doch nichts von einer „durchgreifenden platonischen Reform“.) — Ich glaube, daß die seltsame moderne Vermutung zum Teil durch jenes Mißtrauen hervorgerufen wurde, das man früher — wohl mit Unrecht — einem ausgezeichneten Mathematiker des 5. Jahrhunderts, HIPPOKRATES von Chios gegenüber hegte. Ich kann mich in diesem Zusammenhang mit der Mönchsenquadratur des HIPPOKRATES von Chios natürlich nicht beschäftigen; ich möchte hier nur an einige früheren Behauptungen über diese Quadratur erinnern, die zugleich auch den Weg beleuchten, wie das Beurteilen des HIPPOKRATES in der modernen Forschung auch zu der historischen Konstruktion führte: es hätte in der Geschichte der Mathematik eine „platonische Reform“ gegeben.

Es sei vor allem erwähnt, daß man früher selbst die Kenntnis der indirekten Schlußweise HIPPOKRATES nicht zutrauen wollte²³⁷. Dieses Urteil über Kenntnisse und Fähigkeiten des HIPPOKRATES blieb natürlich auch für die sog. „Textbereinigung“ nicht gleichgültig. Man entfernte bereitwillig aus dem Text des SIMPLICIUS Stellen, die indirekte Beweise enthielten, diese könnten doch nicht von HIPPOKRATES selber stammen, sie wären wohl nur Zutaten des EUDEMOS!²³⁸ Aber damit noch nicht genug! Man ging in dem Interpretieren selbst über den bereinigten Text weit hinaus, um aus dem HIPPOKRATES einen richtigen „Sophisten“ machen zu können.

Es heißt z.B. in dem Text des SIMPLICIUS: HIPPOKRATES hätte bewiesen, daß „Kreise sich zueinander verhalten, wie die Quadrate ihrer Durchmesser“. Da aber der Bericht selber den Beweis für diesen Satz *nicht* mitteilt, fragte man sich: ob HIPPOKRATES seinen Satz in der Tat einwandfrei beweisen konnte?. Jener Beweis nämlich, den man für denselben Satz bei EUKLID findet (Element XII 2.), geht auf EUDOXOS zurück; diesen hat also HIPPOKRATES wohl noch nicht gekannt. Darum versuchte nun O. TOEPLITZ in seinem vorhin erwähnten Aufsatz

²³⁵ REIDEMEISTER, K.: Das exakte Denken der Griechen, Hamburg 1949, 44—65.

²³⁶ WAERDEN, B. L. V. D.: Erwachende Wissenschaft 247.

²³⁷ Siehe H. G. ZEUTHEN, Sur les connaissances géométriques des Grecs, Oversigt over kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger 1913, No 6, S. 448.

²³⁸ Vgl. bei H. G. ZEUTHEN, a. a. O. S. 452.

einen „weniger vollkommenen Beweis“ für denselben Satz zu rekonstruieren — d.h. also einen solchen Beweis, den man auch HIPPOKRATES zutrauen könnte. Er vermutete also, daß HIPPOKRATES bei seinem Beweis von regelmäßigen Vielencken ($4, 8, 16, 32, \dots, n$) ausgegangen wäre. Für diese konnte er einwandfrei zeigen, daß die Flächeninhalte zweier verschiedener (ähnlicher) Vielecke (A und a) sich zueinander verhalten, wie die Quadrate über den Radien der entsprechenden Kreise (R und r); also: $A:a = R^2:r^2$. Daraus hätte nun HIPPOKRATES geschlossen, daß auch die Flächeninhalte der betreffenden Kreise (K und k) ebenso sich zueinander verhielten ($K:k = R^2:r^2$), nachdem je mehr die Seitenzahl zunimmt, um so mehr auch die Flächeninhalte der eingeschriebenen Vielecke *zusehends* den Flächeninhalten der Kreise näherten.

Nachdem nun O. TOEPLITZ diesen naiven „Beweis“ für HIPPOKRATES — ohne übrigens einen näheren Anhaltspunkt dafür in der Überlieferung zu suchen, bloß aus eigener Phantasie — rekonstruiert hatte, fuhr er folgendermaßen fort²³⁹:

„Der Scharfsinn des EUODOXOS hat erkannt, daß hier ein unendlicher Prozeß vollzogen wird, der den Rahmen der rein schließenden Apodeixis verläßt. Der Schluß von den n -Ecken auf die Kreise K und k ist ein logischer Sprung, ein Fehlbeitrag, der aus keinem Axiom gedeckt werden kann, so plausibel er sein mag. Der vorliegende Fall war nicht der einzige, wo ein solcher Sprung vorkam. Er wiederholte sich in ganz ähnlicher Form bei Dutzenden von anderen Sätzen (?), wie sie von den sophistischen Lehrern vorgetragen wurden.“

Danach kam bei TOEPLITZ die Schilderung des eudoxischen Axioms, das zu dem einwandfreien Beweis des hippokratischen Satzes unerlässlich nötig gewesen wäre²⁴⁰, um dann noch einmal den „Sophisten“ und den „wahren platonischen Forscher“ wirkungsvoll einander entgegenstellen zu können:

„Auf der einen Seite der Standpunkt der sophistischen Lehrmeister, die den geheimnisvollen Sprung ins Unendliche elegant vollziehen, auf der anderen Seite die von der Akademie Platons abgestempelte kunstvolle Methodik, die jeden Gedankensprung ausschaltet, den Rahmen der übrigen, endlichen Geometrie restlos wahrt und alles aus dem einen neuen Axiom des EUODOXOS more geometrico herauszieht²⁴¹.“

Es ist aus den beiden letzten Zitaten ersichtlich, daß man es hier eigentlich mit einer *doppelten* historischen Konstruktion zu tun hat. Um die angebliche „platonische Reform“ der Mathematik nachweisen zu können, mußte man zuerst — ziemlich willkürlich — eine interessante „sophistische Mathematik vor der Reform²⁴²“ konstruieren. — Ich brauche es wohl nicht mehr zu betonen, wie wenig diese beiden, miteinander eng verbundenen historischen Konstruktionen vor einer nüchternen Kritik standhalten.

Dagegen glaube ich eine andere Frage, die — soviel ich weiß — eben im Zusammenhang mit der angeblichen „platonischen Reform“ der Mathematik

²³⁹ Die Antike I 182—183.

²⁴⁰ Vgl. oben Anm. 81.

²⁴¹ Die Antike, I 192.

²⁴² Seitdem ist man schon gewohnt — anstatt von einer „sophistischen Mathematik“ zu sprechen — eher die *Strenge der Beweise* in der frühgriechischen Mathematik hervorzuheben; vgl. B. L. V. D. WAERDEN, Math. Ann. 120, 139—140 und „Erwachende Wissenschaft“ 214.

formuliert wurde, jetzt schon mit einiger Gewißheit beantworten zu können. O. TOEPLITZ mußte nämlich am Ende seines eben erwähnten Aufsatzes mit einem Zweifel noch die folgende Frage stellen:

„Ob einmal im Dasein der Mathematik die Philosophie bestimmend in sie eingegriffen hat, ihre eigentlich definitive Gestalt gebildet hat, oder ob sie auch diese ganz aus sich selbst heraus gewonnen hat?“

Nun war im Sinne der hier vorgelegten Untersuchungen die systematische und deduktive Mathematik in ihrem Anfang ein Spezialgebiet der Philosophie, genauer: ein Spezialgebiet der eleatischen Dialektik. Erst mit der theoretischen Grundlegung der *Geometrie* machte sich die griechische Mathematik von der Philosophie allmählich unabhängig.

Anhang

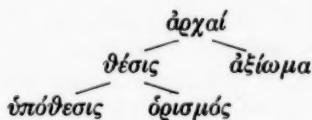
Um den Gedankengang dieser Untersuchung nicht überflüssig zu belasten, möchte ich zu dem Thema „Aristoteles und die Axiomatik der griechischen Mathematik“ in diesem Anhang diesmal nur folgendes bemerken.

Die historische Erforschung dessen, wie sich die Axiomatik der griechischen Mathematik entwickelte, nimmt ihren Ausgangspunkt häufig von ARISTOTELES (s. z. B. TH. HEATH, *The Elements*, Euclid, Cambridge 1908, Einleitung; K. v. FRITZ, *Die APXAI in der griechischen Mathematik*, Archiv f. Begriffsgeschichte I. Bonn 1955; O. BECKER, ebd. Bd. 4, 210ff. etc.). Dies ist nicht nur darum verständlich, weil ARISTOTELES in seinen Schriften oft auf die zeitgenössische Mathematik Bezug nahm, Beispiele zur Erläuterung der eigenen Gedankengänge aus der Mathematik entnahm, ja sich manchmal auch mit der Denkweise der Mathematiker auseinanderzusetzen versuchte, sondern vor allem darum, weil die Probleme der mathematischen Axiomatik zum ersten Male eben bei ARISTOTELES — in den *Analytica posteriora* — im Zusammenhang diskutiert wurden. Natürlich kann die heutige Mathematikgeschichte auf die, manchmal wirklich wertvollen Angaben des ARISTOTELES keineswegs verzichten. Auch manche Fragen der Axiomatik-Geschichte ließen sich ohne die Kenntnis des aristotelischen Materials gar nicht lösen.

Aber man wird sich — was die Rekonstruktion der Axiomatikgeschichte betrifft — vor einer Überschätzung der oft willkürlichen und recht gekünstelten aristotelischen Erklärungen doch hüten müssen. Denn man muß sich ehrlich gestehen, daß die Theorie des ARISTOTELES, wie er das Wesen der Axiomatik erklärte, und besonders wie er die Terminologie der Prinzipien jeder beweisenden Wissenschaft festlegen wollte, im Grunde nur eine mißglückte Konstruktion des Stagiriten war. Man beachte z. B. wie ARISTOTELES im zweiten Kapitel des ersten Buches der *Analytica posteriora* die verschiedenen Arten der ersten Prinzipien (*ἀρχαί*) unterscheiden wollte. (Zu dem folgenden vgl. K. v. FRITZ a. a. O. S. 25.)

Die erste Unterscheidung, die er hier machte, ist zwischen *θέσις* und *ἀξιώματα*. Von der Thesis sagte er, daß sie — wie überhaupt alle ersten Prinzipien — unbeweisbar wäre, und daß es nicht für jeden, der irgend etwas (in wissenschaftlichem Sinne) lernen wollte, notwendig wäre im Besitz der Thesis zu sein. Das Axiom unterschied er von der Thesis eben dadurch, daß jeder, der irgend etwas wissenschaftlich begreifen will, in seinem Besitz sein muß. Die Thesis wurde dann weiter unterteilt in *ἐπόθεσις* und *ὅρησμάτα*. Die *ἐπόθεσις* sagte aus, daß etwas

ist oder nicht ist. Der *δοισμός* (Definition) täte das nicht. Die Definition wäre (wie auch die *ὑπόθεσις*) eine Annahme oder „Setzung“, indem sie festsetzte, daß z.B. die *Einheit* das der Quantität nach Unteilbare ist. Sie würde sich aber von der *ὑπόθεσις* dadurch unterscheiden, daß sie nicht, wie die entsprechende *ὑπόθεσις*, festsetzte, daß etwas *ist*, d.h. also sie definierte die Einheit, aber sie setzte nicht fest, daß es die Einheit gibt. Das allgemeine aristotelische Schema der Einteilung der Prinzipien wäre also demnach:



Selbst wenn man versuchte — um ARISTOTELES und EUKLID irgendwie in Einklang bringen zu können —, das angeführte Schema in dem Sinne auszulegen, daß man sagte: die *ἀξιώματα* des ARISTOTELES wären die „communes animi conceptiones“ des EUKLID — wie sich übrigens diese Gleichsetzung in der Tat einwandfrei begründen läßt —, während die *ὑπόθεσις* den euklidischen *αἴτηματα* entsprachen, und daß also ARISTOTELES auch einen zusammenfassenden Namen (*θέσις*) für die Definitionen und Postulate hätte, der weder aus EUKLID noch aus der sonstigen Literatur in diesem aristotelischen Sinne bekannt ist, auch so stieße man immer noch auf andere beträchtliche Schwierigkeiten. Denn es genügt lange nicht festzustellen, daß ARISTOTELES auch *zwei* solche völlig verschiedene Bedeutungen dem Terminus *αἴτημα* zuschreiben wollte, die nur von sehr weitem her etwas mit den euklidischen *αἴτηματα* (Postulate) zu tun haben (vgl. K. v. FRITZ o. c. 42), und daß man eher in den eben genannten *ὑπόθεσις* des ARISTOTELES etwas ähnliches wie die euklidischen Postulate vermuten dürfte. Im Grunde versagt nämlich auch dieser Erklärungsversuch.

Denn EUKLIDS Postulate sind gar keine Existenzsätze von derselben Art, wie die genannten *ὑπόθεσις* des ARISTOTELES. ARISTOTELES sagt ja (An. post. I 10, 76b 7ff.; K. v. FRITZ, o. c. 54—55): die Mathematiker nähmen die Existenz der Einheit in der Arithmetik und diejenige der Linie und des Punktes in der Geometrie an, und sie bewiesen oder zeigten in der Arithmetik die Existenz des Geraden und Ungeraden, und in der Geometrie die Existenz des Inkommensurablen und des Dreiecks. — Nun gibt es aber bei EUKLID gar nichts von den hier genannten Existenzpostulaten. (Wohl gibt es bei EUKLID Existenzbeweise. Aber selbst was die Beweise dieser Art betrifft, richtet sich EUKLID gar nicht nach ARISTOTELES. Denn ARISTOTELES verlangt ja an der eben angeführten Stelle, daß in der Arithmetik die Existenz des Geraden und Ungeraden „bewiesen werde“, während EUKLID die gerade und ungerade Zahl nur *definiert*, sonst aber ihre Existenz *nicht* beweist. — (Offenbar verstand ARISTOTELES unter „Existenz“ etwas völlig anderes, als PLATON, die Eleaten und die Mathematiker!) Man findet in den arithmetischen Büchern der „Elemente“ (VII—IX) überhaupt keine Existenz- noch irgendwelche anderen Postulate, sondern nur Definitionen. Ebenso wird am Anfang der planimetrischen Bücher die Existenz der Größe nicht postuliert, wie es ARISTOTELES zu verlangen scheint. Die Postulate des EUKLID lassen sich zwar bis zu einem gewissen Grade mit den *ὑπόθεσις* des

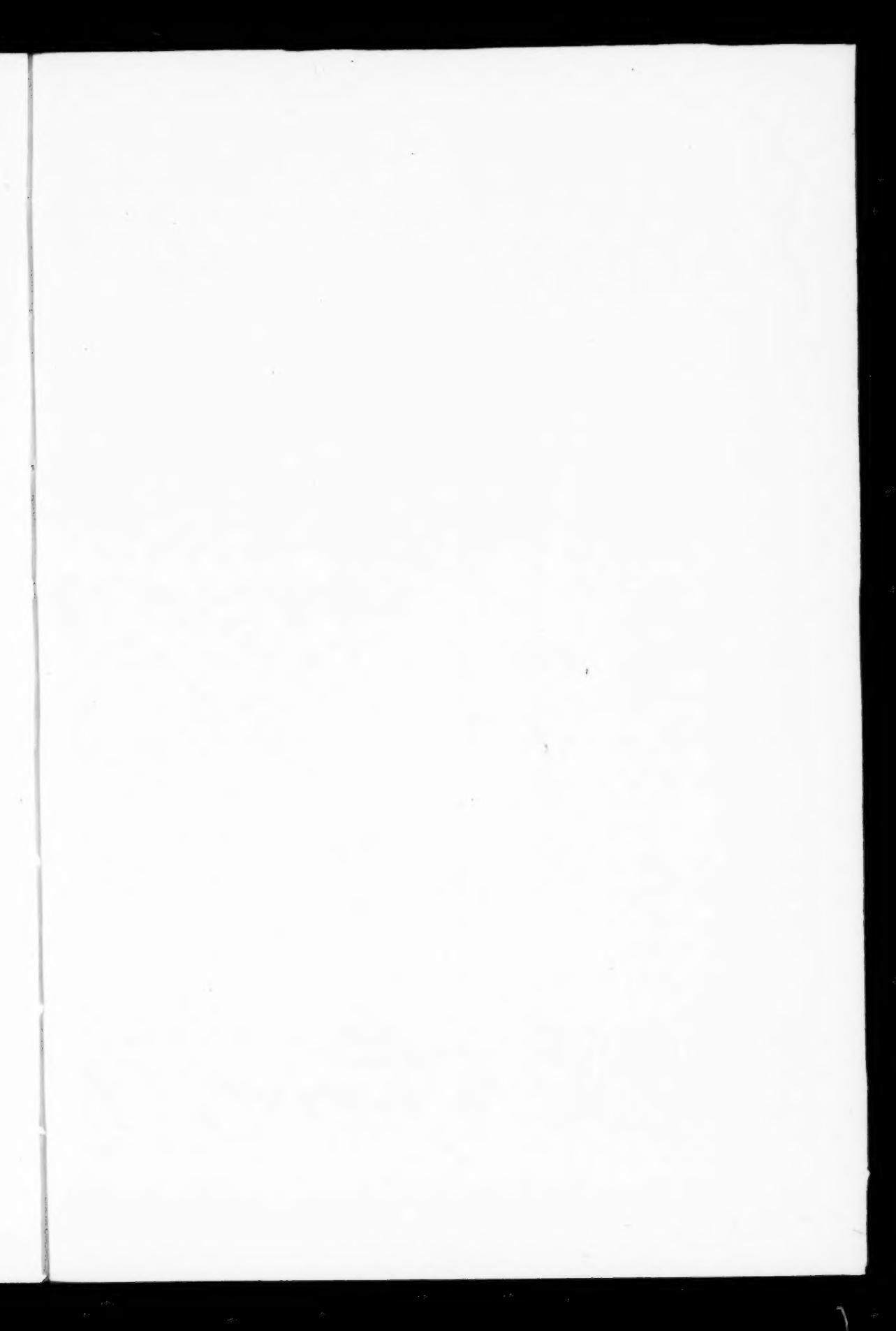
ARISTOTELES vergleichen, aber die beiden Gattungen sind lange nicht identisch. — Man kann die Lehre des ARISTOTELES über die Axiomatik und seine dazu vorgeschlagene Terminologie auf EUKLID — ohne willkürliche Umdeutungen — überhaupt nicht anwenden.

Noch weniger begegnet man derselben aristotelischen Terminologie der Axiomatik bei anderen Mathematikern des Altertums. Ja, wollte man an ARISTOTELES festhalten und ihn irgendwie als Norm betrachten, so müßte man geradezu von einer „vollständigen terminologischen Verwirrung und Unbestimmtheit“ (K. v. FRITZ) sprechen, die bei den nacharistotelischen Mathematikern hinsichtlich der Bezeichnung der verschiedenen Gruppen von *ἀρχαί* geherrscht hatte.

Eben darum habe ich in dieser Arbeit die Zeugnisse des ARISTOTELES über die Terminologie der mathematischen Axiomatik nur mit einer gewissen Vorsicht benutzt. Über die Kompetenz des Stagiriten in diesen Fragen möge lieber die künftige Aristoteles-Interpretation urteilen!

Meredek- u. 15.
Budapest XII. (Ungarn)

(*Ein gegangen am 16. März 1960*)



CONTENTS

TRUESDELL, C., A Program toward Rediscovering the Rational Mechanics of the Age of Reason	1
SZABÓ, Á., Anfänge des euklidischen Axiomensystems	37

Unveränderter Nachdruck

Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1976

